

Masterarbeit

Thema:

Zur Bewertung von Exchange-Optionen

von:

Tobias Ontrup

im Fachbereich Mathematik

an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Betreuer: PD Dr. Volkert Paulsen

Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die europäische Exchange-Option	3
1.1 Das zweidimensionale Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell	3
1.2 Die europäische Exchange-Option im Semimartingalmodell	7
1.3 Die europäische Exchange-Option im zweidimensionalen Black-Scholes-Modell	10
1.4 Bewertung im Diffusionsmodell	17
1.5 Bewertung in einem zweidimensionalen CEV-Modell	20
2 Die amerikanische Exchange-Option	29
2.1 Die Methode von Beibel/Lerche	31
2.2 Anwendung auf die Perpetual-American-Exchange-Option	35
2.3 Die Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option	38
2.3.1 Der erweiterte dividendenfreie Fall	39
2.3.2 Positive Dividenden	42
2.3.3 Ausweitung der Dividenden auf weitere Fälle	48
2.3.4 Fall (A0)	51
2.3.5 Fall (A3)	55
2.3.6 Fall (A4)	59
2.3.7 Fall (A5)	63
2.3.8 Zusammenfassung der Bewertung	66
3 Die Symmetrie von Carr	68
3.1 Put und Call im Black-Scholes-Modell	69
3.2 Exchange-Optionen im Black-Scholes-Modell	71
3.3 Die Symmetrie in einem vollständigen Marktmodell	74
3.3.1 Die Symmetrie von Carr im Vasicek-Modell	79
3.3.2 Ein hinreichendes Kriterium für die Symmetrie	85
3.4 Barriere-Optionen	90
Fazit	96
Literaturverzeichnis	98

Abbildungsverzeichnis

1	Das Stoppgebiet und die Wertfunktion im dividendenfreien Fall	42
2	Das Stoppgebiet und die Wertfunktion im Fall positiver Dividenden . .	48
3	Darstellung der Bereiche $D0$, $D1$ und $D2$ auf der (δ_1, δ_2) -Ebene	51
4	Darstellung von $D3$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene	56
5	Das Stoppgebiet und die Wertfunktion im Fall (A3)	60
6	Stoppgebiet und Wertfunktion für den Spezialfall $y_+ = y_-$	60
7	Darstellung von $D4$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene	61
8	Darstellung von $D5$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene	63

Einleitung

Innerhalb dieser Arbeit sollen verschiedene Ansätze zur Bewertung von Exchange-Optionen in unterschiedlichen Modellsituationen vorgestellt werden. Eine Option ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht gibt, ein gewisses Finanzgut zu einem zukünftigen Zeitpunkt oder in einem zukünftigen Zeitraum zu kaufen oder zu verkaufen. Exchange-Optionen geben ihrem Käufer das Recht ein Finanzgut gegen ein anderes einzutauschen. Dabei sind beide Basiswerte und die Laufzeit der Option beim Abschluss fest bestimmt. Typischerweise werden Exchange-Optionen als europäische Optionen gehandelt, d. h., sie können nur zu einem vorher festgelegten Zeitpunkt T ausgeübt werden. Amerikanische Exchange-Optionen, welche innerhalb der gesamten Laufzeit eingelöst werden können, sind aber ebenfalls handelbar. Bei den betroffenen Underlyings kann es sich etwa um Aktien, Währungen oder Indizes handeln. Sei beispielsweise eine Currency-Option gegeben, die den Inhaber berechtigt Euro gegen US-Dollar zu tauschen. So entspräche diese Option, für einen in einer Drittwährung rechnenden Investor, einer Exchange-Option auf die beiden genannten Währungen. Exchange-Optionen können somit unter anderem dazu dienen, sich gegen Wechselkursschwankungen abzusichern. Des Weiteren ist aber auch eine Absicherung gegen Korrelationseffekte zwischen Aktien durch Exchange-Optionen denkbar. In dieser Arbeit wird der Einfachheit halber ausschließlich von Aktien als Underlyings die Rede sein.

William Margrabe stellte 1978 in [10] als erster einen Ansatz zur Bewertung von europäischen Exchange-Optionen vor. Aus diesem Grund wird die Exchange-Option in der Literatur auch häufig als Margrabe-Option bezeichnet. Margrabe modelliert in seinem Ansatz die Preisprozesse der beiden Finanzgüter durch zwei geometrische Brownsche Bewegungen. In diesem Modell lässt sich dann eine geschlossene Preisformel für die Option herleiten.

Eine Option wird bewertet, indem man versucht den zufälligen Preisverlauf der Underlyings innerhalb eines Finanzmarktmodells nachzubilden, um anschließend einen fairen Preis zu berechnen. Solche Modelle weisen jedoch immer Schwächen gegenüber der Realität auf, oder der Rechenaufwand zur Bestimmung von Optionspreisen ist zu hoch. In der Finanzwelt kommen daher nach Abwägung der Modellschwächen je nach Situation unterschiedliche Marktmodelle zum Einsatz. Innerhalb dieser Arbeit sollen verschiedene Bewertungsansätze für Exchange-Optionen in einem allgemeinen Wiener-Prozess getriebenen Semimartingalmodell und in Spezialfällen dieses Modells vorgestellt werden. Es soll herausgestellt werden, welchen Einfluss unterschiedliche Annahmen, an das Finanzmarktmodell, auf die Bewertungssituation haben können. Dabei wird neben der europäischen Exchange-Option auch eine amerikanische Exchange-Option mit unendlicher Laufzeit im Black-Scholes-Modell betrachtet. Die Gliederung

der Arbeit soll im Folgenden kurz erläutert werden.

Im **ersten Kapitel** liegt der Fokus auf der Bewertung der europäischen Exchange-Option. Zu Beginn wird dazu das zweidimensionale Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell eingeführt, welches in der gesamten Arbeit als Bewertungsrahmen dienen soll. Dabei handelt es sich um ein Finanzmarktmodell mit einem Geldmarktkonto und zwei korrelierenden Aktien. Dieses Modell lässt sich variieren, indem beispielsweise einschränkende Annahmen an die Volatilität der Aktien gemacht werden. Hier soll genauer beleuchtet werden, unter welchen Voraussetzungen eine geschlossene Bewertungsformel für die europäische Option garantiert ist.

Das **zweite Kapitel** beschäftigt sich mit der Bewertung einer amerikanischen Exchange-Option mit unendlicher Laufzeit. Um diese Option bewerten zu können wird ein kurzer Einblick in die Theorie des optimalen Stoppens stochastischer Prozesse gegeben. Dabei soll die Methode von Beibel/Lerche aus [1] vorgestellt werden, welche in geeigneten Situationen zum Lösen stochastischer Maximierungsprobleme genutzt werden kann. Weiterhin wird hier nach einem Weg gesucht, diese Technik auf die Perpetual-American-Exchange-Option im zweidimensionalen Black-Scholes-Modell anzuwenden. Hier stellt sich heraus, dass der Preis der Option stark von den Dividendenzahlungen der Aktien abhängig ist und daher je nach Situation unterschiedliche Vorgehensweisen zur Preisberechnung notwendig sind. Ziel ist es, in geeigneten Dividendensituationen die Methode von Beibel/Lerche auf die Option anzuwenden.

Im **dritten Kapitel** soll eine Symmetrie der Preise europäischer Exchange-Optionspreise hergeleitet werden. Im eindimensionalen Black-Scholes-Modell existiert eine Symmetrie zwischen den Preisen von Put- und Call-Optionen. Diese Symmetrie wird Put-Call-Symmetrie von Carr genannt und soll auf das zweidimensionale Black-Scholes-Modell übertragen werden. Anschließend soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen diese Symmetrie auch in allgemeineren Finanzmarktmodellen gilt. Dabei wird die europäische Exchange-Option unter anderem auch in einem vollständigen Finanzmarktmodell mit stochastischer Zinsrate betrachtet. Anschließend soll noch eine mögliche Anwendung dieser Symmetrie gezeigt werden.

1 Die europäische Exchange-Option

Eine Exchange-Option ist eine Option, deren Auszahlung von zwei unterschiedlichen, möglicherweise korrelierenden, Aktien abhängt. Mit einer solchen Option erwirbt der Käufer das Recht, eine Aktie gegen eine bestimmte andere Aktie einzutauschen. Dabei sind beide Aktien bei Abschluss der Option eindeutig festgelegt. Bei der europäischen Exchange-Option hat man dieses Austauschrecht nur zu einem, bei Abschluss der Option vereinbartem, festen Zeitpunkt T . Das Ziel in diesem ersten Abschnitt besteht darin, einen Preis für dieses Austauschrecht festlegen zu können. Dazu wird zunächst ein Finanzmarkt zur Bewertung der Exchange-Option modelliert um im Anschluss einen arbitragefreien Preis der Option zu berechnen. Im ersten Teil dieses Abschnittes soll ein allgemeines, zweidimensionales Wiener-Prozess getriebenes Semimartingalmodell eingeführt werden. Dieses Modell bildet dann die Bewertungsgrundlage in der weiteren Arbeit. In dieser allgemeinen Situation wird dann zunächst ein erster Bewertungsansatz für die Option vorgestellt. Weiter soll untersucht werden, unter welchen einschränkenden Annahmen an die Modellparameter sogar geschlossene Preisformeln für die europäische Exchange-Option existieren. Dabei wird sich herausstellen, dass beispielsweise die Annahme deterministischer Volatilitäten für die Existenz einer geschlossenen Preisformel ausreicht. Das Resultat der Bewertung wird sich in den weiteren Kapiteln als nützlich erweisen. Im Anschluss daran soll noch an einem Beispiel demonstriert werden, dass auch in speziellen Modellen mit stochastischer Volatilität Preisformeln existieren können. Der Aufbau des im Folgenden beschriebenen Modells orientiert sich an den Ausführungen in [11].

1.1 Das zweidimensionale Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell

Im Folgenden wird ein Finanzmarktmodell zur Bewertung der europäischen Exchange-Option vorgestellt. Dieses Modell soll die Preisprozesse von zwei risikobehafteten, korrelierenden Aktien und einem Geldmarktkonto beschreiben. Das Geldmarktkonto wird dabei als risikolos vorausgesetzt und dient als Numéraire. Das Handeln in dem Finanzmarkt soll für den endlichen Handelszeitraum $[0, T]$ beschrieben werden. Genauer stellt die Maturität der Option $T < \infty$ den Zeithorizont des Modells dar. Dem Finanzmarktmodell liege ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ zugrunde. Der Zufall in dem Modell soll durch einen zweidimensionalen Wiener-Prozess $B := (B_1(t), B_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ beschrieben werden. Die Filtration soll den Informationsverlauf innerhalb des Modells widerspiegeln und daher wird $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ als die von B erzeugte Filtration vorausgesetzt. Der Verlauf der Zinskurve in dem Modell soll durch

einen previsiblen Prozess r beschrieben werden mit $\int_0^t |r(s)| ds < \infty$ für alle $0 \leq t \leq T$. Der Preisprozess β des Geldmarktkontos sei dann bestimmt durch die Differentialgleichung

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt \text{ mit Anfangswert } \beta(0) = 1.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Die Preisprozesse der beiden Aktien werden mit S_1 und S_2 bezeichnet und seien bestimmt durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t) (\mu_i(t)dt + \lambda_{i1}(t)dB_1(t) + \lambda_{i2}(t)dB_2(t)), \text{ für } 0 \leq t \leq T \text{ und } i = 1, 2$$

mit Anfangswert $S_i(0) := s_i$. Dabei sei $(\lambda_i(t))_{0 \leq t \leq T} = (\lambda_{i1}(t), \lambda_{i2}(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein \mathbb{R}_+^2 -wertiger previsibler Prozess mit $\int_0^t |\lambda_i^2(s)| ds < \infty$ und $(\mu_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein \mathbb{R} -wertiger previsibler Prozess mit $\int_0^t |\mu(s)| ds < \infty$ für alle $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$. Der Preisprozess der i -ten Aktie ist dann explizit gegeben als Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung und hat die Form

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left(\int_0^t \lambda_i(s) dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_i(s)|^2 ds\right) \exp\left(\int_0^t \mu_i(s) ds\right)$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Dabei lässt sich der Prozess μ_i als Renditerate zum jeweiligen Zeitpunkt interpretieren. Weiter wird durch die Prozesse λ_{ij} die Volatilität der Aktienpreise und in gewisser Weise auch die Korrelation der Aktienpreise mit Hilfe der beiden unabhängigen Wiener-Prozesse B_1 und B_2 beschrieben. Im Folgenden soll der Zusammenhang der Prozesse λ_{ij} und der Volatilität der einzelnen Aktien noch genauer herausgestellt werden. Die Prozesse λ_{i1} und λ_{i2} werden im Folgenden als Matrix

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(t) & \lambda_{12}(t) \\ \lambda_{21}(t) & \lambda_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

zusammengefasst und es wird $|\lambda_i(t)|^2 > 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ vorausgesetzt. Die Matrix λ wird dann als Volatilitätsmatrix bezeichnet. Dadurch wurde nun das Semimartingalmodell in einer allgemeinen Form mit unabhängigen Wiener-Prozessen beschrieben. Das Problem besteht nun darin, dass das Modell in dieser allgemeinen Form nicht unbedingt vollständig ist. Die europäische Exchange-Option soll jedoch in einem vollständigen Marktmodell betrachtet werden. Dadurch wird dann auch ein eindeutiger

arbitragefreier Preis der Option garantiert. Aus diesem Grund werden im Folgenden nur Volatilitätsmatrizen von einer ganz bestimmten Form zugelassen. Ziel ist es, das Finanzmarktmodell so umzuschreiben, dass der Zufall durch zwei korrelierende Wiener-Prozesse W_1 und W_2 beschrieben wird. Dadurch erhält man dann eine zweite mögliche Darstellung des Modells. Durch

$$W_i(t) := \int_0^t \frac{\lambda_{i1}(s)}{|\lambda_i(s)|} dB_1(s) + \int_0^t \frac{\lambda_{i2}(s)}{|\lambda_i(s)|} dB_2(s) \quad \text{für } i = 1, 2$$

lässt sich zu jeder der beiden Aktien ein Wiener-Prozess definieren. Für den Preisprozess der i -ten Aktie gilt dann

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t)dt + |\lambda_i(s)|dW_i(t)) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

W_1 und W_2 sind in diesem Fall abhängige Wiener-Prozesse. Dabei gilt für ihre Kovariation

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \int_0^t \frac{\lambda_{11}(s)\lambda_{21}(s) + \lambda_{12}(s)\lambda_{22}(s)}{|\lambda_1(s)||\lambda_2(s)|} ds.$$

Hier bezeichnet $(\langle \cdot, \cdot \rangle)_t$ den quadratischen Kovariationsprozess von zwei Semimartingalen. Innerhalb dieser Arbeit soll nun angenommen werden, dass die Volatilitätsmatrix gegeben ist durch

$$\lambda(t) := \begin{pmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ \rho(t)\sigma_2(t) & \sqrt{1 - \rho^2(t)}\sigma_2(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit $\sigma_i(t) > 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$. Dabei seien $(\sigma_1(t))_{0 \leq t \leq T}$, $(\sigma_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ und $(\rho(t))_{0 \leq t \leq T}$ previsible, \mathbb{R} -wertige Prozesse. Im Folgenden soll kurz gezeigt werden, dass sich durch diese Annahmen dann die gewünschte Darstellungsmöglichkeit des Modells ergibt. Zusätzlich wird dadurch die Vollständigkeit des Modells garantiert, da die Matrix λ offensichtlich invertierbar ist. Der Prozess $\sigma_i(t)$ lässt sich als lokale Volatilität der i -ten Aktie zum Zeitpunkt t interpretieren. Es gilt

$$W_1(t) := B_1(t) \text{ und } W_2(t) := \int_0^t \rho(s) dB_1(s) + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2(s)} dB_2(s),$$

und für die Kovariation ergibt sich

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \left\langle B_1(\cdot), \int_0^\cdot \rho(s) dB_1(s) + \int_0^\cdot \sqrt{1 - \rho^2(s)} dB_2(s) \right\rangle_t = \int_0^t \rho(s) ds.$$

Der Prozess $(\rho(t))_{0 \leq t \leq T}$ bildet somit ein Maß für die Stärke der Abhängigkeit der Wiener-Prozesse zur Zeit t . Für die Preisprozesse der Aktien ergibt sich nach diesen Festlegungen

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left(\int_0^t \sigma_i(s) dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t \mu_i(s) ds \right) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Somit lässt sich jeder Aktienpreisprozess in Abhängigkeit von nur einem einzigen Wiener-Prozess beschreiben. Da die Anzahl der treibenden Wiener-Prozesse mit der Anzahl der Aktien übereinstimmt, und die Volatilitätsmatrix invertierbar ist, ist das definierte Finanzmarktmodell nach den Fundamentalsätzen der Preistheorie vollständig. Dadurch existiert ein eindeutiges, zu \mathbb{P} äquivalentes Martingalmaß \mathbb{P}^* auf (Ω, \mathcal{F}_T) . Das heißt, die diskontierten Preisprozesse $(S_i(t)/\beta(t))_{0 \leq t \leq T}$ sind Martingale bezüglich \mathbb{P}^* . Der Maßwechsel zu \mathbb{P}^* kann nach dem Satz von Girsanov durch

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \vartheta(s) dB(s) - \int_0^t |\vartheta(s)|^2 ds \right) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T$$

erfolgen. Dabei ist $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T} = (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein previsible, \mathbb{R}^2 -wertiger Prozess. Bezüglich \mathbb{P}^* sind dann die Prozesse $B_i^*(t) := B_i(t) - \int_0^t \vartheta_i(s) ds$ Wiener-Prozesse. Es sei angemerkt, dass sich bei dieser Definition nichts an der Korrelation zwischen den beiden Wiener-Prozessen ändert und B_1^* und B_2^* somit weiterhin unabhängig voneinander bleiben. Mittels der in (1) definierten Volatilitätsmatrix λ lässt sich der Prozess $(\vartheta(t))_{0 \leq t \leq T}$ im zweidimensionalen Modell genauer angeben. Schreibt man die beiden Aktienpreisprozesse zusammen als $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ und definiert $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$, so ergibt sich mit Hilfe der stochastischen Differentialgleichung aus der Definition der Preisprozesse

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \lambda(t)dB(t)) = S(t)(\mu(t)dt + \lambda(t)dB^*(t) + \lambda(t)\vartheta(t)dt).$$

Da der diskontierte Preisprozess der Aktien ein Martingal bezüglich \mathbb{P}^* ist, muss die Renditerate $\mu(t) + \lambda(t)\vartheta(t)$ der Aktien zu jedem Zeitpunkt t mit der Zinsratenfunktion $r(t)$ übereinstimmen. Daraus ergibt sich konkret die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ \rho(t)\sigma_2(t) & \sqrt{1 - \rho^2(t)}\sigma_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1(t) \\ \vartheta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ r(t) \end{pmatrix},$$

welche für $0 \leq t \leq T$ erfüllt sein muss. Wie bereits bemerkt, ist die Matrix λ durch die Forderung $\sigma_i(t) > 0$ für alle t invertierbar. Dadurch besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung. Als eindeutiger Prozess für den Maßwechsel mit Girsanov zum

äquivalenten Martingalmaß ergibt sich dann $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t))$ mit

$$\vartheta_1(t) := -\frac{\mu_1(t) - r(t)}{\lambda_1(t)} \quad \text{und} \quad \vartheta_2(t) := -\frac{\mu_2(t) - r(t) - \rho(t)\sigma_2(t)\vartheta_1(t)}{\sqrt{1 - \rho^2(t)}\sigma_2(t)}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Nach diesem Maßwechsel lassen sich zwei korrelierende Wiener-Prozesse bezüglich \mathbb{P}^* definieren. Analog zur Situation mit relativem Wahrscheinlichkeitsmaß erhält man diese \mathbb{P}^* -Wiener-Prozesse durch die Definition $W_1^*(t) := B_1^*(t) = B_1(t) - \int_0^t \vartheta_1(s) ds = W_1(t) - \int_0^t \vartheta_1(s) ds$ und durch

$$\begin{aligned} W_2^*(t) &:= \int_0^t \rho(s) dB_1^*(s) + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2(s)} dB_2^*(s) \\ &= \int_0^t \rho(s) dB_1(s) - \int_0^t \rho(s)\vartheta_1(s) ds + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2(s)} dB_2(s) - \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2(s)}\vartheta_2(s) ds \\ &= W_2(t) - \int_0^t \rho(s)\vartheta_1(s) + \sqrt{1 - \rho^2(s)}\vartheta_2(s) ds \\ &= W_2(t) - \int_0^t -\frac{\mu_2(t) - r(t)}{\sigma_2(t)} ds. \end{aligned}$$

Die Umformungen nach den jeweiligen Definitionen sollen noch einmal veranschaulichen, wie man W_1^* und W_2^* auch direkt aus den Prozessen W_1 und W_2 erhält. Mit Hilfe dieser beiden Prozesse können dann die Preisprozesse der beiden Aktien im Finanzmarktmodell explizit angegeben werden durch

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left(\int_0^t \sigma_i(s) dW_i^*(s) - \int_0^t \sigma_i^2(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$$

oder auch als stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)(r(t)dt + \sigma_i(t)dW_i^*(t)), \quad \text{mit Anfangswert } S_i(0),$$

für $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$. Dadurch hat man auch bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes eine Darstellung der Prozesse, in der jeweils nur ein einziger Wiener-Prozess auftaucht, wobei man gleichzeitig mit der Funktion ρ ein Maß für die Korrelation der beiden Aktien erhält. In diesem allgemeinen Semimartingalmodell soll im Folgenden die europäische Exchange-Option bewertet werden.

1.2 Die europäische Exchange-Option im Semimartingalmodell

In diesem Abschnitt soll ein möglicher Bewertungsansatz für die europäische Exchange-Option vorgestellt werden. Dazu wird das in Abschnitt 1.1 vorgestellte zweidimensionale Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell herangezogen. Das Vorgehen bei

der Bewertung der Option entspricht dabei dem Vorgehen von Margrabe in [10] und wird hier nur auf dieses allgemeinere Modell ausgeweitet. Die Maturität der Option wird als identisch mit dem Zeithorizont $T < \infty$ des Modells vorausgesetzt. Der Inhaber der Option erwirbt das Recht, zum Zeitpunkt T eine Aktie S_2 gegen eine Aktie S_1 einzutauschen, falls die Differenz der Aktienpreise positiv ist. Im Falle einer negativen Differenz würde der Inhaber der Option diese einfach verfallen lassen. Daher kann die Auszahlungsfunktion f der europäischen Exchange-Option, in Abhängigkeit der beiden Aktienpreise zum Zeitpunkt T , angegeben werden durch

$$f(S_1(T), S_2(T)) := (S_1(T) - S_2(T))^+.$$

Dabei bezeichnet $(\cdot)^+ := \max\{0, \cdot\}$ hier und in den nachfolgenden Ausführungen den Positivteil einer Funktion. Der Wert der europäischen Exchange-Option zum Zeitpunkt $t \leq T$ wird im Folgenden mit $V_e(t, S_1(t), S_2(t), T)$ bezeichnet. Ist speziell der Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ gemeint, so wird das erste Argument fallen gelassen und der Optionswert wird als $V_e(s_1, s_2, T)$ geschrieben. Der arbitragefreie Preis lässt sich dann nach den Grundsätzen der Preistheorie berechnen durch

$$V_e(s_1, s_2, T) := \mathbb{E}^* \left[\frac{(S_1(T) - S_2(T))^+}{\beta(T)} \right], \quad (2)$$

wobei $\mathbb{E}^*[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes bezeichnet. Um den Ausdruck in (2) genauer zu bestimmen, sollen zunächst zwei neue Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{P}_1^* und \mathbb{P}_2^* definiert werden. Diese beiden Maße sollen äquivalent zu \mathbb{P}^* sein und über einen Dichtequotientenprozess beschrieben werden. Da der diskontierte Aktienpreisprozess $(S_i(t)/\beta(t))_{0 \leq t \leq T}$ für $i = 1, 2$ ein positives Martingal bezüglich \mathbb{P}^* ist, besitzt der Prozess

$$(L_i(t))_{0 \leq t \leq T} := \left(\frac{S_i(t)}{s_i \beta(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$$

die Eigenschaft $\mathbb{E}^*[L_t] = 1$ für alle $0 \leq t \leq T$. Mit Hilfe des Satzes von Girsanov lassen sich dann über den Dichtequotientenprozess zwei Maße auf \mathcal{F}_T konstruieren durch

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} := L_i(t) = \exp \left(\int_0^t \sigma_i(s) dW_i^*(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds \right),$$

für $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$. Für das Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell soll vorausgesetzt werden, dass $\left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ ein \mathbb{P}_1^* -Martingal bzw. dass $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ ein \mathbb{P}_2^* -Martingal ist. Der Maßwechsel zu \mathbb{P}_i^* entspricht damit einem Wechsel des Numéraires zur i -ten Aktie. Das Maß \mathbb{P}_i^* entspricht nach dem Numérairewechsel dem äquivalenten

Martingalmaß und soll im Folgenden als **Aktienmartingalmaß** zu Aktie i bezeichnet werden. Nach dem Maßwechsel zu \mathbb{P}_1^* lässt sich nach dem Satz von Girsanov ein \mathbb{P}_1^* -Wiener-Prozess W_{11}^* definieren durch $W_{11}^*(t) := W_1^*(t) - \int_0^t \sigma_1(s) ds$. Aufgrund der Korrelation von W_1^* und W_2^* bleibt W_2^* vom Maßwechsel zu \mathbb{P}_1^* nicht unberührt und ist somit kein \mathbb{P}_1^* -Wiener-Prozess. Durch die Definition

$$\begin{aligned} W_{21}^*(t) &:= W_2^*(t) - \int_0^t \rho(s) \sigma_1(s) ds \\ &= \int_0^t \rho(s) dB_1^*(s) + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2(s)} dB_2^*(s) - \int_0^t \rho(s) \sigma_1(s) ds \\ &= \int_0^t \rho(s) dW_{11}^*(s) + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2(s)} dB_2^*(s) \end{aligned}$$

erhält man jedoch einen weiteren \mathbb{P}_1^* -Wiener-Prozess. Die Umformungen nach der Definition veranschaulichen noch einmal, dass W_{21}^* tatsächlich ein Wiener-Prozess ist, und dass die Funktion ρ weiterhin die Korrelation der Prozesse W_{11}^* und W_{21}^* durch $\langle W_{11}^*, W_{21}^* \rangle_t = \int_0^t \rho(s) ds$ beschreibt. Dabei ist zu beachten, dass B_2^* unabhängig von W_{11}^* ist und daher ebenfalls einen \mathbb{P}_1^* -Wiener-Prozess beschreibt. Entsprechend dazu lassen sich bezüglich \mathbb{P}_2^* die beiden Wiener-Prozesse $W_{12}^*(t) := W_1^*(t) - \int_0^t \rho(s) \sigma_2(s) ds$ und $W_{22}^*(t) := W_2^*(t) - \int_0^t \sigma_2(s) ds$ definieren. Auch hier gilt $\langle W_{21}^*, W_{22}^* \rangle_t = \int_0^t \rho(s) ds$. Unter Verwendung der Maße \mathbb{P}_1^* , \mathbb{P}_2^* und der neu definierten Wiener-Prozesse lässt sich der Preis der europäischen Exchange-Option genauer bestimmen. Bezeichnet man mit \mathbb{E}_i^* den Erwartungswert bezüglich \mathbb{P}_i^* für $i = 1, 2$, so erhält man für den Optionswert das folgende Ergebnis.

Satz 1.2.1. *Gegeben sei das zweidimensionale Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell aus Abschnitt 1.1. Dann gilt für den Preis der europäischen Exchange-Option in diesem Modell*

$$V_e(s_1, s_2, T) = s_1 \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right) - s_2 \mathbb{P}_2^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right). \quad (3)$$

Beweis: Durch den Übergang zum jeweiligen Aktienmartingalmaß lässt sich die Be-

hauptung des Satzes relativ schnell zeigen. Es folgt direkt

$$\begin{aligned}
 V_e(s_1, s_2, T) &= \mathbb{E}^* \left[\frac{(S_1(T) - S_2(T))^+}{\beta(T)} \right] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[\frac{S_1(T)}{\beta(T)} \mathbf{1}_{\{S_1(T) > S_2(T)\}} \right] - \mathbb{E}^* \left[\frac{S_2(T)}{\beta(T)} \mathbf{1}_{\{S_1(T) > S_2(T)\}} \right] \\
 &= s_1 \mathbb{E}_1^* \left[\mathbf{1}_{\{S_1(T) > S_2(T)\}} \right] - s_2 \mathbb{E}_2^* \left[\mathbf{1}_{\{S_1(T) > S_2(T)\}} \right] \\
 &= s_1 \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right) - s_2 \mathbb{P}_2^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right).
 \end{aligned}$$

□

Die in der Preisformel auftretenden Wahrscheinlichkeiten entsprechen der Wahrscheinlichkeit unter dem jeweiligen Aktienmartingalmaß, dass die Option ausgeübt wird. So ist der Preis das Produkt des Startpreises der ersten Aktie und der Ausübungswahrscheinlichkeit unter \mathbb{P}_1^* vermindert um das Produkt vom Startpreis der zweiten Aktie und der Ausübungswahrscheinlichkeit unter \mathbb{P}_2^* . Die Schwierigkeit bei der konkreten Bewertung der Option besteht darin, die Wahrscheinlichkeiten in (3) zu bestimmen. Dazu ist das Verhalten des Prozesses $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich der Maße \mathbb{P}_1^* bzw. \mathbb{P}_2^* von Bedeutung. Im allgemeinen Semimartingalmodell ist diese Verteilung jedoch nicht ohne Weiteres zu bestimmen. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels soll erläutert werden, unter welchen zusätzlichen Bedingungen an das Semimartingalmodell eine genauere Berechnung des Preises erfolgen kann. An dieser Stelle kann angemerkt werden, dass sich die Zinsratenfunktion r aus dem Quotienten der Aktienpreise kürzen lässt. Dadurch ist der Preis der europäischen Exchange-Option völlig unabhängig von der Zinsrate. Es wird sich später herausstellen, dass aus diesem Grund die Existenz einer geschlossenen Preisformel eng mit der Form der Volatilitätsfunktionen verknüpft ist.

1.3 Die europäische Exchange-Option im zweidimensionalen Black-Scholes-Modell

In diesem Kapitel soll die Bewertung der europäischen Exchange-Option im zweidimensionalen Black-Scholes Modell durchgeführt werden. Das Black-Scholes Modell stellt einen Spezialfall des in Abschnitt 1.1 vorgestellten Modells dar. Genauer handelt es sich bei dem Black-Scholes-Modell um ein Wiener-Prozess getriebenes Semimartingalmodell, bei dem sämtliche Koeffizientenfunktionen als konstant vorausgesetzt sind. Zudem sollen innerhalb dieses Modells Dividendenzahlungen der Aktien berücksichtigt werden. Die Modellierung der Dividendenzahlungen orientiert sich dabei an [5, Abschnitt 2] und [15, Abschnitt 1]. Es wird angenommen, dass die Dividenden als

stetiger Geldfluss proportional zum Aktienpreis gezahlt werden. Bei der aus diesen Modellannahmen resultierenden Bewertungsformel handelt es sich um die Formel von Margrabe, welche er als erster in [10] beschrieben hat. Für das nächste Kapitel ist das Black-Scholes Modell von zentraler Bedeutung, da dort die Perpetual-American-Exchange-Option in diesem Finanzmarktmodell bewertet werden soll. Das Modell hat den Vorteil, dass sich viele Rechnungen durch die konstanten Koeffizienten stark vereinfachen. Somit ist das Modell in der Praxis leicht zu handhaben. Durch die in dem Modell getroffenen Annahmen lassen sich allerdings viele in der Realität auftretenden Phänomene in diesem Modell nicht darstellen. So kann beispielsweise der sogenannte Volatilitäts-Smile nicht modelliert werden, da das Modell eine konstante Volatilität annimmt. Trotz dieser Schwächen ist es ein in der Finanzwelt häufig verwendetes Modell. Das Black-Scholes-Modell lässt sich auf die gleiche Weise wie das allgemeine Semimartingalmodell herleiten. Aufgrund der konstanten Koeffizienten entfallen jedoch sämtliche Integrale. Gegeben sei also wieder ein zeitstetiger Finanzmarkt mit endlichem Zeithorizont $T < \infty$ und drei Möglichkeiten zur Geldanlage. Dem Finanzmarkt liege dabei wieder der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zugrunde, und der Zufall wird durch die beiden korrelierenden Wiener-Prozesse W_1 und W_2 getrieben. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ soll dabei die von den Wiener-Prozessen erzeugte Filtration sein. Die risikolose, konstante Zinsrate $r > 0$ des Geldmarktkontos führt zur Dynamik

$$d\beta(t) = \beta(t)r dt.$$

Definiert man erneut $\beta(0) = 1$, so kann die obige Differentialgleichung als Anfangswertproblem gelöst werden. Dadurch lässt sich der Bond schreiben als

$$\beta(t) = e^{rt} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Die Preisprozesse der zwei risikobehafteten Aktien S_1 und S_2 werden bei konstanten Koeffizienten beschrieben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt - \delta_i dt + \sigma_i dW_i(t)) \quad \text{mit Anfangswerten } S_i(0) = s_i > 0$$

für $i = 1, 2$. Dabei ist $\mu_i \in \mathbb{R}$ die konstante Drift und $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ die konstante lokale Volatilität der i -ten Aktie. Durch $\delta_i \in \mathbb{R}$ ist der konstante Anteil gegeben, welcher proportional zum Aktienpreis als Dividende gezahlt wird. Der Aktienpreis verringert sich dadurch stets um die gezahlte Dividende. Auf diese Weise wird eine Arbitrage ausgeschlossen. Insbesondere werden dabei auch negative Dividenden zugelassen. Eine negative Dividende entspräche dabei einem Kapitalfluss in die Aktie. Genau um

diesen Kapitalfluss würde sich dann der Preis der Aktie stetig erhöhen. Besonders bei der späteren Bewertung der amerikanischen Exchange-Option im zweidimensionalen Black-Scholes-Modell erhält man, durch das Zulassen negativer Dividenden, interessante Ergebnisse. Weiter wird angenommen, dass W_1 und W_2 um den Faktor $\rho \in (-1, 1)$ korreliert sind. Das Anfangswertproblem der Aktienpreisprozesse wird gelöst durch

$$S_i(t) = s_i e^{(\mu_i - \delta_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i(t)} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq T \text{ für } i = 1, 2.$$

Genauer gesagt entsprechen die Aktienpreisprozesse somit einer geometrischen Brownschen Bewegung. Das risikoneutrale Maß soll wieder mit \mathbb{P}^* bezeichnet werden. Die \mathbb{P}^* -Wiener-Prozesse W_1^* und W_2^* lassen sich durch $W_i^*(t) = W_i(t) - \vartheta_i t$ für $i = 1, 2$ definieren mit $\vartheta_i := -\frac{\mu_i + \delta_i - r}{\sigma_i}$. An dieser Stelle ist zu beachten, dass beim Maßwechsel zu \mathbb{P}^* die Dividendenzahlungen der Aktien zu berücksichtigen sind. Zur risikoneutralen Bewertung sollte der Wert eines Portfolios mit reinvestierten Dividenden herangezogen werden. Die Aktienpreisprozesse bezüglich \mathbb{P}^* ergeben sich somit über die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)((r - \delta_i)dt + \sigma_i dW_i^*(t)) \quad \text{mit Anfangswert } S_i(0) = s_i$$

als

$$S_i(t) = s_i e^{(r - \delta_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i^*(t)}.$$

Hier lässt sich erkennen, dass die Preisprozesse der Aktien bei Dividendenzahlungen keine \mathbb{P}^* -Martingale sind, sondern noch eine Drift von $-\delta_i$ besitzen. Betrachtet man allerdings ein Portfolio, bestehend aus der Aktie und deren reinvestierter Dividenden, so ist dessen Wertentwicklung wie gewünscht ein Martingal bezüglich des risikoneutralen Maßes \mathbb{P}^* . Unter diesen Modellbedingungen lässt sich der Preis der europäischen Exchange-Option explizit angeben.

Satz 1.3.1. *(Die europäische Exchange-Option im Black-Scholes Modell)*

Der Preis der europäischen Exchange-Option in einem Black-Scholes-Modell mit Dividendenzahlungen bei Startpreisen s_1, s_2 und Laufzeit T ist gegeben durch

$$V_e(s_1, s_2, T) = s_1 e^{-\delta_1 T} \Phi(d_+(s_1, s_2, T)) - s_2 e^{-\delta_2 T} \Phi(d_-(s_1, s_2, T)).$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße

und d_{\pm} ist definiert durch

$$d_{\pm}(s_1, s_2, t) := \frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 t + \delta_2 t \pm \frac{\sigma^2}{2} t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \quad \text{mit } \sigma^2 := \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Beweis: Im Rückblick auf Satz 1.2.1 besteht die wesentliche Aufgabe der Beweisführung darin, die Verteilung von $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ unter dem jeweiligen Aktienmartingalmaß zu bestimmen. In den Rechnungen sind in diesem Modell aber zusätzlich noch die Dividendenzahlungen zu berücksichtigen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^*[e^{-rt}(S_1(T) - S_2(T))^+] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rt}(S_1(T) - S_2(T))\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rt}S_1(T)\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}] - \mathbb{E}^*[e^{-rt}S_2(T)\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Um den Term (4) weiter zu bestimmen, seien erneut die beiden Aktienmartingalmaße \mathbb{P}_1^* und \mathbb{P}_2^* gegeben durch

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i W_i^*(t)} \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } 0 \leq t \leq T.$$

Weiter erhält man wieder nach Girsanov die \mathbb{P}_i^* -Wiener-Prozesse $W_{ii}^*(t) := W_i^*(t) - \sigma_i t$ und $W_{ji}^*(t) := W_j^*(t) - \rho\sigma_i t$ für $i = 1, 2$. Auch hier lässt sich ein Maßwechsel zu \mathbb{P}_i^* wieder als Wechsel des Numéraires zu $(S_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ interpretieren. Bezeichne mit $\mathbb{E}_i^*[\cdot]$ den jeweiligen Erwartungswert bezüglich der neuen Maße, dann ergibt sich für (4)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^*[e^{-rt}S_1(T)\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}] - \mathbb{E}^*[e^{-rt}S_2(T)\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}] \\ &= s_1 e^{-\delta_1 T} \mathbb{E}_1^*[\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}] - s_2 e^{-\delta_2 T} \mathbb{E}_2^*[\mathbf{1}_{\{S_1(T) \geq S_2(T)\}}] \\ &= s_1 e^{-\delta_1 T} \mathbb{P}_1^*(S_1(T) \geq S_2(T)) - s_2 e^{-\delta_2 T} \mathbb{P}_2^*(S_1(T) \geq S_2(T)). \end{aligned} \quad (5)$$

Die beiden Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Aktienmartingalmaße in (5) lassen sich

dann getrennt voneinander bestimmen. Für die erste Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_1^*(S_1(T) > S_2(T)) \\
&= \mathbb{P}_1^*(s_1 e^{rT - \delta_1 T - \frac{\sigma_1^2}{2}T + \sigma_1 W_1^*(T)} > s_2 e^{rT - \delta_2 T - \frac{\sigma_2^2}{2}T + \sigma_2 W_2^*(T)}) \\
&= \mathbb{P}_1^*\left(\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 T + \delta_2 T + \frac{\sigma_1^2}{2}T - \rho\sigma_1\sigma_2 T + \frac{\sigma_2^2}{2}T > \sigma_2 W_{21}^*(T) - \sigma_1 W_{11}^*(T)\right) \\
&= \mathbb{P}_1^*\left(\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 T + \delta_2 T + \frac{\sigma_1^2}{2}T}{\sqrt{\sigma^2 T}} > \frac{\sigma_2 W_{21}^*(T) - \sigma_1 W_{11}^*(T)}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) \tag{6} \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 T + \delta_2 T + \frac{\sigma_1^2}{2}T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) = \Phi(d_+(s_1, s_2, T)).
\end{aligned}$$

Für die letzte Umformung wurde hier angewandt, dass W_{11}^* und W_{21}^* Wiener-Prozesse unter \mathbb{P}_1^* sind. Definiert man also $\sigma^2 := \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$, so besitzt die linke Seite der Ungleichung in (6) dieselbe Verteilung wie eine standardnormalverteilte Zufallsgröße. Durch analoge Umformungen erhält man für die zweite Wahrscheinlichkeit in (5)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_2^*(S_1(T) > S_2(T)) \\
&= \mathbb{P}_2^*\left(\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 T + \delta_2 T - \frac{\sigma_1^2}{2}T}{\sqrt{\sigma^2 T}} > \frac{\sigma_2 W_{22}^*(T) - \sigma_1 W_{12}^*(T)}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 T + \delta_2 T - \frac{\sigma_1^2}{2}T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) = \Phi(d_-(s_1, s_2, T)).
\end{aligned}$$

Hier wurde entsprechend zu (6) angewandt, dass W_{12}^* und W_{22}^* Wiener-Prozesse unter \mathbb{P}_2^* sind. Durch Einsetzen dieser Ergebnisse erhält man aus (5) den Preis der Exchange-Option. \square

Nachdem die Option nun in einem Modell mit konstanten Koeffizienten bewertet wurde, soll noch die europäische Exchange-Option in einem Wiener-Prozess getriebenen Semimartingalmodell mit deterministischen, zeitabhängigen Koeffizientenfunktionen betrachtet werden. Es wird angenommen, dass die Prozesse σ_1 , σ_2 , r und ρ rein vom Zeitparameter t abhängig sind. Hier kann die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten in der Preisformel aus (3) ähnlich wie im Black-Scholes-Modell mit konstanten Koeffizienten stattfinden. Es ergibt sich ebenfalls eine geschlossene Preisformel. In dieser Situation wird angenommen, dass keine der Aktien Dividenden zahlt.

Satz 1.3.2. *(Wert der europäischen Exchange-Option bei deterministischen Koeffizienten ohne Dividendenzahlungen)*

Gegeben sei das in Abschnitt 1.1 eingeführte zweidimensionale Wiener-Prozess getriebe-

ne Semimartingalmodell. Darüber hinaus wird angenommen, dass die lokale Volatilität der i -ten Aktie durch eine deterministische, zeitabhängige Funktion $\sigma_i : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ mit $\int_0^t \sigma_i^2(s) ds < \infty$ für alle $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$ gegeben sei. Die Funktion $\rho : [0, T] \rightarrow (-1, 1)$ sei ebenfalls als deterministisch vorausgesetzt. Dann gilt für den Wert einer europäischen Exchange-Option mit Laufzeit T bei Aktienstartpreisen s_1 und s_2

$$V_e(s_1, s_2, T) = s_1 \Phi(d_+(s_1, s_2, T)) - s_2 \Phi(d_-(s_1, s_2, T)),$$

wobei d_{\pm} definiert ist durch

$$d_{\pm}(s_1, s_2, T) := \frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) \pm \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s) ds}}$$

mit $\sigma(t) := \sqrt{\sigma_1^2(t) - 2\sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t) + \sigma_2^2(t)}$.

Beweis: Nach (3) gilt für den Preis der Option

$$V_e(s_1, s_2, T) = s_1 \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right) - s_2 \mathbb{P}_2^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right).$$

Für die Dynamik von $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ liefert die Itô-Formel

$$\begin{aligned} d \frac{S_1(t)}{S_2(t)} &= \frac{1}{S_2(t)} dS_1(t) - \frac{S_1(t)}{S_2^2(t)} dS_2(t) - \frac{1}{S_2^2(t)} d\langle S_1, S_2 \rangle_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{S_1(t)}{S_2^3(t)} d\langle S_2 \rangle_t \\ &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} (r(t)dt + \sigma_1(t)dW_1^*(t)) - \frac{S_1(t)}{S_2(t)} (r(t)dt + \sigma_2(t)dW_2^*(t)) \\ &\quad - \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t)dt + \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \sigma_2^2(t)dt \\ &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} (\sigma_1(t)dW_1^*(t) - \sigma_2(t)dW_2^*(t) - \sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t)dt + \sigma_2^2(t)dt). \end{aligned} \quad (7)$$

Weiter lässt sich die Dynamik nun unter Zuhilfenahme der Wiener-Prozesse W_{ij}^* umschreiben. Dabei seien die Prozesse W_{ij} wieder definiert wie in Abschnitt 1.2. Unter \mathbb{P}_1^*

gilt dann für die Dynamik von $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$

$$\begin{aligned} d\frac{S_1(t)}{S_2(t)} &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)}(\sigma_1(t)dW_{11}^*(t) + \sigma_1^2(t)dt - \sigma_2(t)dW_{21}^*(t) - \sigma_2(t)\sigma_1(t)\rho(t)dt \\ &\quad - \sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t)dt + \sigma_2^2(t)dt) \\ &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)}(\sigma_1(t)dW_{11}^*(t) - \sigma_2(t)dW_{21}^*(t) + \sigma_1^2(t)dt - 2\sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t)dt + \sigma_2^2(t)dt). \end{aligned} \quad (8)$$

Auf gleiche Weise ergibt sich bezüglich \mathbb{P}_2^* die Dynamik

$$\begin{aligned} d\frac{S_1(t)}{S_2(t)} &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)}(\sigma_1(t)dW_{12}^*(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t)dt - \sigma_2(t)dW_{22}^*(t) - \sigma_2^2(t)dt \\ &\quad - \sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t)dt + \sigma_2^2(t)dt) \\ &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)}(\sigma_1(t)dW_{12}^*(t) - \sigma_2(t)dW_{22}^*(t)). \end{aligned} \quad (9)$$

Zusammen mit den Anfangswertbedingungen $S_i(0) = s_i$ für $i = 1, 2$ sind die Differentialgleichungen eindeutig lösbar und man erhält den Prozess $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ in expliziter Form als

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{s_1}{s_2} \exp\left(\int_0^T \sigma_1(t) dW_{11}^*(t) - \int_0^T \sigma_2(t) dW_{21}^*(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_1^2(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t) - \sigma_2^2(t) dt\right)$$

mit Wiener-Prozessen bezüglich \mathbb{P}_1^* bzw.

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{s_1}{s_2} \exp\left(\int_0^T \sigma_1(t) dW_{12}^*(t) - \int_0^T \sigma_2(t) dW_{22}^*(t) + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_1^2(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t) - \sigma_2^2(t) dt\right)$$

bezüglich \mathbb{P}_2^* . Definiert man weiter $\sigma(t) := \sqrt{\sigma_1^2(t) - \sigma_1(t)\sigma_2(t)\rho(t) + \sigma_2^2(t)}$, so gilt

$$\int_0^T \sigma_1(t) dW_{1i}^*(t) - \int_0^T \sigma_2(t) dW_{2i}^*(t) = \int_0^T \sigma(t) d\bar{W}_i(t) \quad (10)$$

für einen Wiener-Prozess \overline{W}_i bezüglich \mathbb{P}_i^* . Mit dieser Definition folgt dann

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right) &= \mathbb{P}_1^* \left(\frac{s_1}{s_2} \exp \left(\int_0^T \sigma(t) d\overline{W}_1^*(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(t) dt \right) > 1 \right) \\
 &= \mathbb{P}_1^* \left(- \int_0^T \sigma(t) d\overline{W}_1^*(t) dt < \frac{s_1}{s_2} - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(t) dt \right) \\
 &= \mathbb{P}_1^* \left(\frac{- \int_0^T \sigma(t) d\overline{W}_1^*(t)}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt}} dt < \frac{\frac{s_1}{s_2} - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(t) dt}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt}} \right) \\
 &= \Phi(d_+(s_1, s_2, T)).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei ist zu beachten, dass die linke Seite der Ungleichung in (11) standardnormalverteilt ist, da $\int_0^T \sigma^2(t) dt$ genau die quadratische Variation von $-\int_0^T \sigma(t) d\overline{W}_1^*(t)$ ist. Die quadratische Variation lässt sich aufgrund der deterministischen Struktur von σ_1, σ_2 und ρ konkret berechnen, wodurch die Wahrscheinlichkeit explizit als Funktionswert der Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung angegeben werden kann. Völlig analog dazu folgt auch

$$\mathbb{P}_2^* \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} > 1 \right) = \Phi(d_-(s_1, s_2, T)).$$

Damit ergibt sich dann die explizite Preisformel der europäischen Exchange-Option für den Fall deterministischer, zeitabhängiger Koeffizientenfunktionen. \square

Im Beweis des Satzes erkennt man gleichzeitig ein auftretendes Problem, sobald die Koeffizientenfunktionen nicht mehr von deterministischer Natur sind. Die rechte Seite der Ungleichung in (11) ist im Fall stochastischer Volatilität im Vorfeld nicht zu bestimmen. Daher kann der Preis der Option allgemein nicht mehr einfach durch Auswertungen der Normalverteilungsfunktion berechnet werden. In Abschnitt 1.5 wird beispielhaft ein Finanzmarktmodell gezeigt, in dem eine explizite Angabe der Preisformel möglich ist, obwohl die Volatilität nicht von rein deterministischer Natur ist. Zuvor soll im nächsten Abschnitt jedoch noch ein möglicher Bewertungsansatz im Diffusionsmodell gezeigt werden.

1.4 Bewertung im Diffusionsmodell

In diesem Abschnitt soll die europäische Exchange-Option in einem dividendenfreien Diffusionsmodell betrachtet werden. Das Diffusionsmodell stellt einen Spezialfall des Wiener-Prozess getriebenen Semimartingalmodells dar. Der Aufbau des Modells orientiert sich an [11]. Dazu wird angenommen, dass die Koeffizientenfunktionen nur lokal

von der Zeit und den aktuellen Aktienpreisen abhängig sind. Konkret wird also vorausgesetzt, dass die Volatilitätsfunktionen $\sigma_i : [0, T] \times (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar sind mit $\int_0^t \sigma_i^2(u, S_1(u), S_2(u)) du < \infty$ für $i = 1, 2$ und für alle $0 \leq t \leq T$ \mathbb{P}^* -fast sicher. Entsprechend soll die Zinsratenfunktion $r : [0, T] \times (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar sein mit $\int_0^t r(u, S_1(u), S_2(u)) du < \infty$ für $i = 1, 2$ und für alle $0 \leq t \leq T$ \mathbb{P}^* -fast sicher. Insbesondere bildet somit auch das Black-Scholes-Modell mit konstanten oder deterministischen Dividenden einen Spezialfall des Diffusionsmodells. Es wird angenommen, dass die Dynamiken der Preisprozesse bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{P}^* vorliegen. Das Geldmarktkonto erfüllt die Differentialgleichung

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t, S_1(t), S_2(t))dt \text{ mit Anfangswert } \beta(0) = 1 \text{ für } 0 \leq t \leq T.$$

Analog zum allgemeinen Modell erfüllt der Preisprozess der i -ten Aktie die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)(r(t, S_1(t), S_2(t))dt + \sigma_i(t, S_1(t), S_2(t))dW_i^*(t)), \text{ mit Anfangswert } S_i(0),$$

für $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$. Im Folgenden soll ein Bewertungsansatz über eine partielle Differentialgleichung für die europäische Exchange-Option hergeleitet werden. Dieser Ansatz orientiert sich an den Ausführungen in [11]. Für den Preis der Option gilt

$$\mathbb{E}^*[(S_1(T) - S_2(T))^+ \exp\left(-\int_t^T r(u, S_1(u), S_2(u)) du\right) | \mathcal{F}_t] = V_e(t, S_1(t), S_2(t), T).$$

So kann der Preisprozess der Option als Funktion in Abhängigkeit der Zeit und der beiden Aktienpreise aufgefasst werden. Für eine übersichtlichere Darstellung werden im Folgenden die verkürzten Schreibweisen $V_e(t) := V_e(t, S_1(t), S_2(t), T)$, $\sigma_i(t) := \sigma_i(t, S_1(t), S_2(t))$ und $r(t) := r(t, S_1(t), S_2(t))$ verwendet. An dieser Stelle soll zusätzlich angenommen werden, dass die Itô-Formel auf den Preisprozess anwendbar ist. Dazu müssen neben $\mathbb{E}^*[\beta(T)^{-1}(S_1(T) - S_2(T))^+] < \infty$ auch gewisse Glattheitsbedingungen an $V(t)$ erfüllt sein, auf die hier jedoch nicht genauer eingegangen werden soll. Die

Itô-Formel liefert dann

$$\begin{aligned}
 dV_e(t) &= \partial_t v(t)dt + \partial_1 V_e(t)dS_1(t) + \partial_2 V_e(t)dS_2(t) + \frac{1}{2}\partial_1^2 V_e(t)d\langle S_1 \rangle_t + \frac{1}{2}\partial_2^2 V_e(t)d\langle S_2 \rangle_t \\
 &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2}\partial_{12}^2 V_e(t)d\langle S_1, S_2 \rangle_t \\
 &= \partial_t V_e(t)dt + S_1(t)r(t)\partial_1 V_e(t)dt + S_1(t)\sigma_1(t)\partial_1 V_e(t)dW_1^*(t) + S_2(t)r(t)\partial_2 V_e(t)dt \\
 &\quad + S_2(t)\sigma_2(t)\partial_2 V_e(t)dW_2^*(t) + \frac{1}{2}S_1^2(t)\sigma_1^2(t)\partial_1^2 V_e(t)dt + \frac{1}{2}S_2^2(t)\sigma_2^2(t)\partial_2^2 V_e(t)dt \\
 &\quad + \rho(t)S_1(t)S_2(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)\partial_{12}^2 V_e(t)dt \\
 &= [\partial_t V_e(t) + S_1(t)r(t)\partial_1 V_e(t) + S_2(t)r(t)\partial_2 V_e(t) + \frac{1}{2}S_1^2(t)\sigma_1^2(t)\partial_1^2 V_e(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2}S_2^2(t)\sigma_2^2(t)\partial_2^2 V_e(t) + \rho(t)S_1(t)S_2(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)\partial_{12}^2 V_e(t)]dt \\
 &\quad + S_1(t)\sigma_1(t)\partial_1 V_e(t)dW_1^*(t) + S_2(t)\sigma_2(t)\partial_2 V_e(t)dW_2^*(t). \tag{12}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ∂_t die Ableitung nach der Zeit bzw. ∂_i die Ableitung nach dem Preis der i -ten Aktie. Da die Option ein ebenfalls handelbares Finanzgut auf dem Finanzmarkt sein soll, muss der diskontierte Preisprozess ebenfalls ein \mathbb{P}^* -Martingal sein. Andernfalls würde die Arbitragefreiheit verletzt. Mit anderen Worten muss der Driftterm in den eckigen Klammer aus (12) mit $r(t)V_e(t)$ übereinstimmen. Zum Ende der Optionslaufzeit sollte der Wertprozess außerdem identisch mit der Optionsauszahlung sein. Der Preis der europäischen Exchange-Option ergibt sich dann als Lösung des zweidimensionalen Cauchy-Problems

$$\begin{aligned}
 r(t)V_e(t) &= \partial_t V_e(t) + S_1(t)r(t)\partial_1 V_e(t) + S_2(t)r(t)\partial_2 V_e(t) + \frac{1}{2}S_1^2(t)\sigma_1^2(t)\partial_1^2 V_e(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2}S_2^2(t)\sigma_2^2(t)\partial_2^2 V_e(t) + \rho(t)S_1(t)S_2(t)\sigma_1(t)\sigma_2(t)\partial_{12}^2 V_e(t) \\
 V_e(T) &= (S_1(T) - S_2(T))^+ \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Die Dynamik von $V_e(t)$ aus (12) lässt sich also in verkürzter Form schreiben als

$$dV_e(t) = r(t)V_e(t)dt + S_1(t)\sigma_1(t)\partial_1 V_e(t)dW_1^*(t) + S_2(t)\sigma_2(t)\partial_2 V_e(t)dW_2^*(t).$$

Da der diskontierte Preisprozess $(\beta(t)^{-1}V_e(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal unter \mathbb{P}^* ist, ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
 d\frac{V_e(t)}{\beta(t)} &= S_1^*(t)\sigma_1(t)\partial_1 V_e(t)dW_1^*(t) + S_2^*(t)\sigma_2(t)\partial_2 V_e(t)dW_2^*(t) \\
 &= \partial_1 V_e(t)dS_1^*(t) + \partial_2 V_e(t)dS_2^*(t). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $S_i^*(t) := \frac{S_i(t)}{\beta(t)}$ den diskontierten Preisprozess der i -ten Aktie. Aus (14) erhält man dann eine Möglichkeit die Exchange-Option zu hedgen. Der sogenannte Δ -Hedge $(H(t))_{0 \leq t \leq T} = (H_1(t), H_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ ist dann ein zweidimensionaler Prozess mit $H_i(t) = \partial_i V_e(t)$ für $0 \leq t \leq T$ und $i = 1, 2$. Über diesen PDE-Ansatz erhält man sowohl eine Möglichkeit die europäische Exchange-Option zu bewerten als auch eine Hedgingstrategie. Das Problem bei diesem Bewertungsansatz besteht jedoch darin, dass die Lösungen von zweidimensionalen Problemen wie in (13) häufig numerisch nur sehr aufwendig zu bestimmen sind. Geschlossene Lösungen können hier im Allgemeinen nicht immer angegeben werden.

1.5 Bewertung in einem zweidimensionalen CEV-Modell

Wie bereits erwähnt soll in diesem Abschnitt ein Modell vorgestellt werden, in dem die Form der Volatilität nicht nur von der Zeit abhängig ist. In den vorherigen Abschnitten konnte bereits beobachtet werden, dass die Existenz einer geschlossenen Preisformel für die europäische Exchange-Option von der Form der Volatilität abhängig ist. Ziel ist die Herleitung einer expliziten Preisformel für die europäische Exchange-Option in einer Art zweidimensionalem CEV-Modell. Die Abkürzung CEV steht dabei für **C**onstant **E**lasticity of **V**ariance. Im Folgenden soll der Aufbau des Modells genauer erläutert werden. Dem Modell soll grundsätzlich die Struktur des zweidimensionalen Wiener-Prozess getriebenen Modells aus Abschnitt 1.1 zugrunde liegen. Innerhalb dieses Abschnittes wird jedoch angenommen, dass die lokalen Volatilitäten von einer sehr speziellen Form sind, welche im Folgenden erläutert werden soll. Die folgende Beschreibung des Modells orientiert sich an Abschnitt 4.1 aus [6]. Weitere Details zu den Eigenschaften von CEV-Prozessen lassen sich auch in [7] nachlesen. Im eigentlichen eindimensionalen CEV-Modell wird angenommen, dass die lokale Volatilität σ der Aktie von der Zeit und dem Preis der Aktie abhängig ist. Genauer gesagt, liegt ein sogenannter Separationsansatz zugrunde und die lokale Volatilität ist von der Form $\sigma(S_t, t) = \bar{\sigma}(t) \cdot S_t^\alpha$, wobei $\bar{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion ist und $\alpha > -1$ als konstant vorausgesetzt wird. Das eindimensionale CEV-Modell stellt einen Spezialfall des eindimensionalen Wiener-Prozess getriebenen Semimartingalmodells dar. Dadurch ist hier die Dynamik der Aktienpreise bezüglich des relativen Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P} gegeben durch

$$dS_t = S_t \mu(t) dt + \bar{\sigma}_t S_t^{\alpha+1} dW_t.$$

In Kapitel 4 von [6] ist zu sehen, dass dieses Modell die Eigenschaft hat, dass in ihm explizite Preisformeln für Put- und Calloptionen angegeben werden können. In

diesem Abschnitt soll diese Eigenschaft genutzt werden, um in einem zweidimensionalen Finanzmarktmodell mit ähnlicher Volatilitätsstruktur eine explizite Preisformel der europäischen-Exchange-Option anzugeben. Dazu wird ein Modell betrachtet, in dem die Volatilität beider Aktien vom Quotienten aus den Aktienpreisen abhängt. Die Form der lokalen Volatilitätsfunktionen wird im Folgenden dabei als

$$\sigma_i(S_1(t), S_2(t), t) := \bar{\sigma}_i(t) \cdot \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)^\alpha \quad \text{für } i = 1, 2$$

vorausgesetzt. Dabei sollen die Prozesse $\bar{\sigma}_i$ auch in diesem Modell deterministische, zeitabhängige Funktionen sein und können somit als deterministischer Anteil der Volatilität bezeichnet werden. Die Konstante α soll in diesem Modell im Intervall $(-1, 1)$ liegen. Der Fall $\alpha = 0$ soll jedoch ausgeschlossen werden, da das Modell unter dieser Voraussetzung genau dem Modell mit deterministischen, zeitabhängigen Koeffizienten entspricht, welches bereits in Satz 1.3.2 behandelt wurde. Insbesondere liegt also ein spezieller Fall des Diffusionsmodells vor. Unter obigen Voraussetzungen erfüllen dann die beiden Aktienpreise bezüglich \mathbb{P}^* die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)r(t)dt + S_i(t) \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)^\alpha \bar{\sigma}_i(t)dW_i^*(t) \quad \text{mit Anfangswert } S_i(0) = s_i.$$

Die Bewertung der Option kann mit dem gleichen Ansatz wie in (3) erfolgen, sodass im Folgenden die Verteilung von $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich der Maße \mathbb{P}_1^* und \mathbb{P}_2^* genauer bestimmt werden soll. Auf gleiche Weise wie in (9) erhält man

$$d \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{S_1(t)}{S_2(t)} (\bar{\sigma}_1(t) \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)^\alpha dW_{12}^*(t) - \bar{\sigma}_2(t) \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)^\alpha dW_{22}^*(t)) \quad (15)$$

bezüglich \mathbb{P}_2^* . Definiert man nun

$$\tilde{\sigma}(t) := \sqrt{\bar{\sigma}_1^2(t) - \bar{\sigma}_1(t)\bar{\sigma}_2(t)\rho(t) + \bar{\sigma}_2^2(t)} \quad \text{und} \quad d\tilde{W}(t) := \frac{\bar{\sigma}_1 dW_{12}^*(t) - \bar{\sigma}_2 dW_{22}^*(t)}{\tilde{\sigma}(t)}, \quad (16)$$

so kann (15) geschrieben werden als

$$d \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \tilde{\sigma}(t) \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)^{\alpha+1} d\tilde{W}(t). \quad (17)$$

Bei \tilde{W} handelt es sich aufgrund seiner Definition um einen \mathbb{P}_2^* -Wiener-Prozess. Das Verhalten des Prozesses $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich \mathbb{P}_2^* entspricht also dem Verhalten eines Aktienpreisprozesses im eindimensionalen CEV-Modell ohne Drift, d. h. $\mu(t) \equiv 0$. Weiter muss zur Bewertung der Option ebenfalls die Verteilung von $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich

\mathbb{P}_1^* bestimmt werden. Da die Aktienpreisprozesse als nichtnegativ vorausgesetzt sind, gilt

$$\mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} > 1 \right) = 1 - \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \leq 1 \right) = 1 - \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)} \geq 1 \right),$$

sodass äquivalenterweise auch die Berechnung der Verteilung von $\left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ unter \mathbb{P}_1^* zu einem Ergebnis führt. Analog zu den Umformungen in (7) und (8) erhält man

$$\begin{aligned} d \frac{S_2(t)}{S_1(t)} &= \frac{S_2(t)}{S_1(t)} (\sigma_2(t) dW_2^*(t) - \sigma_1(t) dW_1^*(t) - \sigma_1(t) \sigma_2(t) \rho(t) dt + \sigma_1^2(t) dt) \\ &= \frac{S_2(t)}{S_1(t)} (\sigma_2(t) dW_{21}^*(t) + \sigma_1(t) \sigma_2(t) \rho(t) dt - \sigma_1(t) dW_{11}^*(t) - \sigma_1^2(t) dt \\ &\quad - \sigma_1(t) \sigma_2(t) \rho(t) dt + \sigma_1^2(t) dt) \\ &= \frac{S_2(t)}{S_1(t)} (\sigma_2(t) dW_{21}^*(t) - \sigma_1(t) dW_{11}^*(t)). \end{aligned}$$

Definiert man $\tilde{\sigma}(t)$ wie in (16) und setzt

$$d\bar{\bar{W}}(t) := \frac{\bar{\sigma}_2(t) dW_{21}^*(t) - \bar{\sigma}_1(t) dW_{11}^*(t)}{\tilde{\sigma}(t)},$$

so ist $\bar{\bar{W}}$ ein \mathbb{P}_1^* -Wiener-Prozess. Daraus ergibt sich

$$d \frac{S_2(t)}{S_1(t)} = \bar{\sigma}(t) \left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)} \right)^{1-\alpha} d\bar{\bar{W}}(t).$$

Somit lässt sich das Problem der Preisfindung in diesem speziellen Modell darauf zurückführen, die Verteilung eines Aktienpreisprozesses in einem CEV-Modell ohne Drift zu bestimmen. Nun ist auch ersichtlich, warum $-1 < \alpha < 1$ gefordert wurde. Dadurch wird garantiert, dass in keiner der beiden Differentialgleichungen für $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ bzw. $\left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)} \right)_{0 \leq t \leq T}$ ein negativer Exponent auftritt. Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte des Preisprozesses im CEV-Modell soll im Folgenden genauer beleuchtet werden. Die Herleitung der Wahrscheinlichkeitsdichte orientiert sich dabei an Kapitel 4 von [6]. Sei also ein eindimensionaler Prozess $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit der Dynamik

$$dS_t := \sigma_t S_t^{1+\beta} dW_t$$

gegeben. Dabei beschreibt $\sigma_t > 0$ wie oben den deterministischen Teil der Volatilität. Der Prozess W ist ein Wiener-Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Der Parameter $\beta \neq 0$ soll dabei zwischen -1 und 1 liegen. Um die Verteilung des Prozesses

genauer bestimmen zu können, soll zunächst eine Zeittransformation stattfinden. Dazu wird die Funktion $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert als

$$v(t) := \int_0^t \sigma^2(u) \, du \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Da $\sigma(t) > 0$ für alle t gilt, ist v stetig und streng monoton steigend mit $v(0) = 0$. Mit anderen Worten ist die Funktion v bijektiv. Das heißt, es existiert eine Umkehrfunktion v^{-1} , sodass für jedes $t \in [0, T]$ ein $s \in [0, v(T)]$ mit $t = v^{-1}(s)$ existiert. Mit Hilfe von v lässt sich nun eine Zeittransformation durchführen, sodass $s \in [0, v(T)]$ der neue Zeitparameter ist. Unter dem Zeitwechsel kann durch

$$\tilde{W}(s) := \int_0^{v^{-1}(s)} \sigma(u) \, dW(u)$$

ein neuer Wiener-Prozess definiert werden. Setzt man dann weiter $Y(s) = S(v^{-1}(s))$, so erfüllt Y die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dY(s) &= dS(v^{-1}(s)) = \sigma(v^{-1}(s))S(v^{-1}(s))^{1+\beta} dW(v^{-1}(s)) \\ &= S(v^{-1}(s))^{1+\beta} d\tilde{W}(s) \\ &= Y(s)^{1+\beta} d\tilde{W}(s). \end{aligned}$$

Durch die geschickte Zeittransformation verschwindet also der deterministische Anteil der Volatilität. Bei Prozessen dieser Form ist es nun möglich die Verteilungsdichte genauer zu bestimmen. Die Dichteberechnung von $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ soll unter Verwendung des folgenden Satzes stattfinden. Die Strategie besteht dann darin, die Zeittransformation anschließend rückgängig zu machen. Das resultierende Ergebnis kann dann zur Bewertung der Exchange-Option verwendet werden. Der folgende Satz entspricht dem Satz 4.4 aus [6]. Auch das Vorgehen in seinem Beweis und bei der anschließenden Optionsbewertung orientiert sich an dieser Quelle.

Satz 1.5.1. (*Wahrscheinlichkeitsdichte im CEV-Modell*)

Erfülle $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ die stochastische Differentialgleichung $dS(t) = \bar{\sigma}(t)S(t)^{1+\beta}dW(t)$ mit $S(0) := s$ als Anfangswert und $\beta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Dann ist für beliebiges $t \in [0, T]$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $g_\beta(\cdot; s, t)$ des Prozesses $S(t)$ unter \mathbb{P} gegeben durch

$$g_\beta(x; s, t) = \frac{x^{-2\beta-1}}{|\beta|v(t)} \left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^{-2\beta} + s^{-2\beta}}{2\beta^2v(t)}\right) I_{|\nu|}\left(\frac{x^{-\beta}s^{-\beta}}{\beta^2v(t)}\right)$$

mit

$$I_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{a+2n}}{n!\Gamma(a+n+1)}, \Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du \text{ und } \nu = \frac{1}{2\beta}.$$

Beweis: Auf den Prozess $(Y_s)_{0 \leq s \leq v(T)}$ soll eine Funktion h angewandt werden, sodass man mit $(h(Y_s))_{0 \leq s \leq v(T)}$ einen Prozess mit bekannter Dichte erhält. Durch Rücktransformation erhält man dann schließlich auch die Dichte von $(Y_s)_{0 \leq s \leq v(T)}$. Die Funktion h wird dazu definiert durch

$$h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); \quad x \mapsto \frac{x^{-2\beta}}{\beta^2}.$$

Setzt man dann $X(s) := h(Y(s))$ für $0 \leq s \leq v(T)$, so ergibt sich mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} dX(s) &= -\frac{2}{\beta} Y(s)^{-2\beta-1} dY(s) + \frac{2\beta+1}{\beta} Y(s)^{-2(\beta+1)} d\langle Y \rangle_s \\ &= -\frac{2}{\beta} Y(s)^{-2\beta-1} Y(s)^{1+\beta} d\tilde{W}(s) + \frac{2\beta+1}{\beta} Y(s)^{-2(\beta+1)} Y(s)^{2\beta+2} ds \\ &= 2 \left(\frac{Y(s)^{2\beta}}{(-\beta)^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\tilde{W}(s) + \frac{2\beta+1}{\beta} ds \\ &= 2\sqrt{X(s)} d\tilde{W}(s) + \frac{2\beta+1}{\beta} ds. \end{aligned}$$

Durch die Definition $n := \frac{2\beta+1}{\beta}$ erhält man zusammengefasst für $(X(s))_{0 \leq s \leq v(T)}$ die Dynamik

$$dX(s) = 2\sqrt{X(s)} d\tilde{W}(s) + n ds. \tag{18}$$

Bei einem gegebenen Anfangswert $X(0) := x'$ ist die stochastische Differentialgleichung (18) eindeutig lösbar. Als Lösung ergibt sich ein sogenannter quadriertes Bessel-Prozess mit Dimension n und Index $\nu = \frac{n}{2} - 1 = \frac{1}{2\beta}$. Die Dichten von quadrierten Bessel-Prozessen sind bekannt und sollen im Umfang dieser Arbeit nicht einzeln hergeleitet werden. Details zur Literatur von Bessel-Prozessen können in Kapitel 6 in [7] nachgelesen werden. Auch die im Folgenden verwendeten Wahrscheinlichkeitsdichten sind aus dieser Quelle entnommen. Bei der Herleitung der konkreten Wahrscheinlichkeitsdichte von $(X(s))_{0 \leq s \leq v(T)}$ ist zu bemerken, dass für $\beta \in (-\frac{1}{2}, 0)$ die Dimension des Prozesses negativ ist. Sowohl bei positiver als auch bei negativer Dimension kann die

Wahrscheinlichkeitsdichte für $X(0) = x'$ und $0 \leq s \leq v(T)$ angegeben werden durch

$$q_\beta(x; x', s) = \frac{1}{2s} \left(\frac{x'}{x} \right)^{\frac{\nu}{2}} \exp \left(-\frac{x + x'}{2s} \right) I_{|\nu|} \left(\frac{\sqrt{xx'}}{s} \right).$$

Nach diesem Ergebnis können dann die Transformation durch h und die Zeittransformation durch v wieder rückgängig gemacht werden. Dabei sei erwähnt, dass die Funktion für $\beta \in (-1, 0)$ streng monoton steigend und für $\beta \in (0, 1)$ streng monoton fallend ist für $x > 0$. Die Funktion h ist zudem stetig und somit insbesondere bijektiv in $x > 0$ bei festem β . Für ein festes β und $S(0) = s$ lässt sich dann die Wahrscheinlichkeitsdichte von $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ herleiten durch

$$\begin{aligned} g_\beta(x; s, t) &= \frac{d\mathbb{P}(S(t) \leq x)}{dx} = \frac{d\mathbb{P}(Y(v(t)) \leq x)}{dx} \\ &= \frac{d\mathbb{P}(X(v(t)) \leq h(x))}{dx} = \frac{dh(x)}{dx} q_\beta(h(x); h(s), v(t)) \\ &= \frac{x^{-2\beta-1}}{|\beta|v(t)} \left(\frac{s}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{x^{-2\beta} + s^{-2\beta}}{2\beta^2 v(t)} \right) I_{|\nu|} \left(\frac{x^{-\beta} s^{-\beta}}{\beta^2 v(t)} \right). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes. \square

Mit Hilfe der Dichte dieses Aktienpreisprozesses kann nun auch der Wert einer europäischen Exchange-Option im Beispielmmodell berechnet werden.

Satz 1.5.2. (*Bewertung der europäischen Exchange-Option im zweidimensionalen CEV-Modell*)

Sei ein zweidimensionales Wiener-Prozess getriebenes Semimartingalmodell gegeben. Dabei seien die lokalen Volatilitäten von der Form

$$\sigma_i(S_1(t), S_2(t), t) = \bar{\sigma}_i(t) \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \right)^\alpha \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } \alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

und für deterministische, zeitabhängige Funktionen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$. Dann ist der Preis einer europäischen Exchange-Option mit Laufzeit T bei Startpreisen $S_1(0) = s_1$ und $S_2(0) = s_2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &V_e(s_1, s_2, T) \\ = &\begin{cases} s_1 \left(1 - \chi^2 \left(\frac{1}{\alpha^2 v(t)}; -\frac{1}{\alpha} + 2, f_\alpha \left(\frac{s_1}{s_2} \right) \right) \right) - s_2 \chi^2 \left(f_\alpha \left(\frac{s_1}{s_2} \right); -\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2 v(t)} \right) & \text{für } \alpha \in (-1, 0), \\ s_1 \left(1 - \chi^2 \left(\frac{1}{\alpha^2 v(t)}; \frac{1}{\alpha} + 2, f_\alpha \left(\frac{s_2}{s_1} \right) \right) \right) - s_2 \chi^2 \left(f_\alpha \left(\frac{s_2}{s_1} \right); \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2 v(t)} \right) & \text{für } \alpha \in (0, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\chi^2(\cdot; n, \lambda)$ die Verteilungsfunktion einer nichtzentralen Chi-Quadrat-Verteilung mit Grad $n \geq 0$ und Nichtzentralitätsparameter $\lambda > 0$ und die Funktion f

gegeben durch

$$f_\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); \quad x \mapsto \frac{x^{-2\alpha}}{\alpha^2 v(T)}. \quad (19)$$

Beweis: Nach (3) und Satz 1.5.1 lässt sich der Preis der Option ausdrücken als

$$\begin{aligned} V_e(s_1, s_2, T) &= s_1 \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_2(T)}{S_1(T)} < 1 \right) - s_2 \mathbb{P}_2^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right) \\ &= s_1 \int_0^1 g_{-\alpha} \left(x; \frac{s_2}{s_1}, T \right) dx - s_2 \int_1^\infty g_\alpha \left(x; \frac{s_1}{s_2}, T \right) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Um (20) genauer bestimmen zu können, sollen zunächst Integrale der Form

$$\int_1^\infty g_\alpha \left(x; \frac{s_i}{s_j}, T \right) dx \quad \text{für } i \neq j \in \{1, 2\}$$

betrachtet werden. Dabei wird zusätzlich eine Fallunterscheidung für $\alpha \in (0, 1)$ und $\alpha \in (-1, 0)$ gemacht. Die Berechnung des Integrals geschieht in beiden Fällen mit Hilfe der Substitution $f_\alpha(x) = z$ mit f_α aus (19).

1. Fall: $\alpha \in (0, 1)$

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty g_\alpha \left(x; \frac{s_i}{s_j}, T \right) dx \\ &= \int_1^\infty \frac{x^{-2\alpha-1}}{\alpha v(T)} \left(\frac{s_i/s_j}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{x^{-2\alpha} + (s_i/s_j)^{-2\alpha}}{2\alpha^2 v(T)} \right) I_\nu \left(x^{-\alpha} (s_i/s_j)^{-\alpha} \right) dx \\ &= \int_{f_\alpha(1)}^0 -\frac{1}{2} \left(\frac{f_\alpha(s_i/s_j)}{z} \right)^{-\frac{1}{4\alpha}} \exp \left(-\frac{z + f_\alpha(s_i/s_j)}{2} \right) I_\nu \left(\sqrt{z f_\alpha(s_i/s_j)} \right) dz \\ &= \int_0^{f_\alpha(1)} \frac{1}{2} \left(\frac{z}{f_\alpha(s_i/s_j)} \right)^{\frac{1}{4\alpha}} \exp \left(-\frac{z + f_\alpha(s_i/s_j)}{2} \right) I_\nu \left(\sqrt{z f_\alpha(s_i/s_j)} \right) dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Ableitung der Funktion f gegeben ist durch

$$f'(x) = \frac{-2x^{-2\alpha-1}}{\alpha v(T)} \quad \text{und} \quad f_\alpha(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0 \quad \text{für } \alpha \in (0, 1).$$

Sei nun ψ die Dichte einer nichtzentralen Chi-Quadrat-Verteilung $\chi^2(n, \lambda)$, wobei $n \geq 0$ der Freiheitsgrad und $\lambda > 0$ der Nichtzentralitätsparameter ist. Dann ist ψ allgemein

gegeben durch

$$\psi(x; n, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left(-\frac{x+\lambda}{2}\right) I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{x\lambda}).$$

Der Integrand in (21) entspricht also genau der Dichtefunktion einer nichtzentralen Chi-Quadrat-Verteilung mit $n = \frac{1}{\alpha} + 2 \geq 0$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\lambda = f_\alpha(s_i/s_j) > 0$. Bezeichnet man nun mit $\chi^2(\cdot; n, \lambda)$ die Verteilungsfunktion der nichtzentralen Chi-Quadrat-Verteilung, so folgt aus (21) direkt

$$\int_1^\infty g_\alpha\left(x; \frac{s_i}{s_j}, T\right) dx = \chi^2\left(f_\alpha(1); \frac{1}{\alpha} + 2, f_\alpha\left(\frac{s_i}{s_j}\right)\right).$$

2. Fall: $\alpha \in (-1, 0)$

Mit analogen Umformungen zu (21) und identischer Substitution folgt

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty g_\alpha\left(x; \frac{s_i}{s_j}, T\right) dx \\ &= \int_1^\infty -\frac{x^{-2\alpha-1}}{\alpha v(T)} \left(\frac{s_i/s_j}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^{-2\alpha} + (s_i/s_j)^{-2\alpha}}{2\alpha^2 v(T)}\right) I_\nu\left(x^{-\alpha}(s_i/s_j)^{-\alpha}\right) dx \\ &= \int_{f_\alpha(1)}^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{f_\alpha(s_i/s_j)}{z}\right)^{-\frac{1}{4\alpha}} \exp\left(-\frac{z + f_\alpha(s_i/s_j)}{2}\right) I_\nu\left(\sqrt{z f_\alpha(s_i/s_j)}\right) dz. \end{aligned}$$

Dabei ist zu bemerken, dass $f_\alpha(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = \infty$ für $\alpha \in (-1, 0)$. Daraus ergibt sich dann mit der Substitution $z' := \frac{z}{2}$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty g_\alpha\left(x; \frac{s_i}{s_j}, T\right) dx &= \int_{f_\alpha(1)}^\infty \psi\left(f_\alpha\left(\frac{s_i}{s_j}\right); -\frac{1}{\alpha} + 2, z\right) dz \\ &= \int_{f_\alpha(1)/2}^\infty 2\psi\left(f_\alpha\left(\frac{s_i}{s_j}\right); -\frac{1}{\alpha} + 2, 2z'\right) dz'. \end{aligned}$$

Hierauf kann dann die Gleichheit

$$\int_a^\infty 2\psi(x; n, 2\lambda) dx = \chi^2(x; n-2, 2a)$$

angewandt werden, welche aus Abschnitt 3 von [13] stammt. Insgesamt ergibt sich dann

$$\int_1^\infty g_\alpha\left(x; \frac{s_i}{s_j}, T\right) dx = \chi^2\left(f_\alpha\left(\frac{s_i}{s_j}\right); -\frac{1}{\alpha}, f_\alpha(1)\right).$$

Somit wurden die Integrale aus (20) für die Fälle $\alpha \in (-1, 0)$ und $\alpha \in (0, 1)$ berechnet.

Setzt man die Ergebnisse nun in (20) ein, so folgt die Behauptung des Satzes. Dabei ist zu beachten, dass

$$f_\alpha(1) = \frac{1}{\alpha^2 v(T)} \text{ und } f_{-\alpha}\left(\frac{s_i}{s_j}\right) = f_\alpha\left(\frac{s_j}{s_i}\right).$$

□

Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass auch über den deterministischen Ansatz hinaus, geschlossene Formeln für den Preis der europäischen Exchange-Option existieren können. Wie dieses Beispiel demonstriert, sind solche Formeln aber nicht immer einfach zu finden.

2 Die amerikanische Exchange-Option

Im ersten Kapitel wurde untersucht, welchen Einfluss verschiedene Modellparameter auf die Bewertung der europäischen Exchange-Option haben. Dabei war das Ausüben der Option nur zu einem vorher festgelegten Zeitpunkt T möglich. In diesem Kapitel soll jetzt der Fokus auf der amerikanischen Exchange-Option liegen. Genauer soll die Perpetual-American-Exchange-Option betrachtet werden. Dabei handelt es sich um eine Exchange-Option, welche zu jedem beliebigen Zeitpunkt ausgeübt werden kann und keine Maturität besitzt. Ziel dieses Kapitels wird es sein, eine vollständige Bewertung dieser Option im zweidimensionalen Black-Scholes-Modell aus Abschnitt 1.3 durchzuführen. Die Bewertung der amerikanischen Exchange-Option im allgemeinen Wiener-Prozess getriebenen Semimartingalmodell ist deutlich komplizierter und soll im Umfang dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Das Hauptproblem bei der Bewertung amerikanischer Optionen besteht darin, eine optimale Strategie zur Ausübung der Option zu finden. Nach einer kurzen Einführung in die Theorie des optimalen Stoppens, soll in Abschnitt 2.1 die Methode von Beibel/Lerche vorgestellt werden, welche sich unter bestimmten Voraussetzungen zum Lösen solcher stochastischer Optimierungsprobleme eignet. Im Anschluss daran soll dann geklärt werden, inwiefern diese Technik zur Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option eingesetzt werden kann. Dabei wird sich herausstellen, dass die Form der Dividendenzahlungen der beiden Aktien einen gravierenden Einfluss auf die Anwendbarkeit der Beibel/Lerche/Methode hat. Auch die optimale Stoppstrategie ist stark von den Dividendenzahlungen abhängig. Abschließend soll eine komplette Bewertung der Option für alle möglichen Kombinationen von Dividendenzahlungen im Black-Scholes-Modell stattfinden.

Zunächst soll ein allgemeiner Ansatz aus der Theorie zum Lösen stochastischer Optimierungsprobleme für die Exchange-Option vorgestellt werden. Die dazu genutzte Theorie ist in Kapitel 2 von [3] und in Kapitel 3, 4 und 6 von [8] nachzulesen. Sei h die Auszahlungsfunktion einer amerikanischen Option mit unendlicher Laufzeit und bezeichne V den Wertprozess der Option. Die Auszahlungsfunktion sei genauer gegeben als $h = h(S_1(t), S_2(t))$ in Abhängigkeit der beiden Aktienpreise zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Dann lässt sich der arbitragefreie Preisprozess der Option angeben als

$$V(S_1(t), S_2(t)) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau} h(S_1(\tau), S_2(\tau)) \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}].$$

Dabei bezeichnet \mathcal{T}_t die Menge aller \mathcal{F}_t -Stoppzeiten, d. h., das Supremum wird über alle Stoppzeiten mit $\tau \geq t$ gebildet. Genauer gesagt ist dabei ein stochastisches Maximierungsproblem zu lösen. Das Problem der Preisfindung besteht daher in der Suche

nach einer optimalen Stoppzeit $\tau^* \in \mathcal{T}$, sodass

$$V(S_1(t), S_2(t)) = \mathbb{E}^*[e^{-r\tau^*} h(S_1(\tau^*), S_2(\tau^*)) \mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}],$$

falls eine solche Stoppzeit überhaupt existiert. Eine optimale Stoppstrategie kann dann so interpretiert werden, dass der gesamte Zustandsraum $E := (\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$ der beiden Aktienpreise in einen Fortsetzungsbereich C und einen Stoppbereich S unterteilt wird. Sobald die Option den Stoppbereich erreicht, wird sie ausgeübt. Nach der Theorie des optimalen Stoppens besitzt der Fortsetzungsbereich C der Option allgemein die Form $C := \{(s_1, s_2) \in E : V(s_1, s_2) > h(s_1, s_2)\}$. Der Stoppbereich ist dann genau das Komplement von C und definiert durch $S := \{(s_1, s_2) \in E : V(s_1, s_2) = h(s_1, s_2)\}$. Die Ersteintrittszeit in den Stoppbereich ist dann eine optimale Stoppzeit. Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Bewertungsproblems ist der Ansatz über ein freies Randwertproblem. Zu bemerken ist, dass der Preis aufgrund der fehlenden Maturität der Option nicht von der Zeit t abhängt, sondern nur von den Aktienpreisen $S_1(t)$ und $S_2(t)$. Also kann der Preisprozess als Funktion V in den beiden Variablen $S_1(t)$ und $S_2(t)$ aufgefasst werden. Weiter wird angenommen, dass die Itô-Formel auf $V(S_1(t), S_2(t))$ angewandt werden kann. Diese liefert dann

$$\begin{aligned} dV(S_1(t), S_2(t)) &= \partial_1 V(S_1(t), S_2(t)) dS_1(t) + \partial_2 V(S_1(t), S_2(t)) dS_2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_1^2 V(S_1(t), S_2(t)) d\langle S_1 \rangle_t + \frac{1}{2} \partial_2^2 V(S_1(t), S_2(t)) d\langle S_2 \rangle_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 2 \partial_{12}^2 V(S_1(t), S_2(t)) d\langle S_1, S_2 \rangle_t \\ &= S_1(t)(r - \delta_1) \partial_1 V(S_1(t), S_2(t)) dt + S_1(t) \sigma_1 \partial_1 V(S_1(t), S_2(t)) dW_1^*(t) \\ &\quad + S_2(t)(r - \delta_2) \partial_2 V(S_1(t), S_2(t)) dt + S_2(t) \sigma_2 \partial_2 V(S_1(t), S_2(t)) dW_2^*(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} S_1^2(t) \sigma_1^2 \partial_1^2 V(S_1(t), S_2(t)) dt + \frac{1}{2} S_2^2(t) \sigma_2^2 \partial_2^2 V(S_1(t), S_2(t)) dt \\ &\quad + \rho S_1(t) S_2(t) \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 V(S_1(t), S_2(t)) \\ &= [S_1(t)(r - \delta_1) \partial_1 V(S_1(t), S_2(t)) + S_2(t)(r - \delta_2) \partial_2 V(S_1(t), S_2(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} S_1^2(t) \sigma_1^2 \partial_1^2 V(S_1(t), S_2(t)) + \frac{1}{2} S_2^2(t) \sigma_2^2 \partial_2^2 V(S_1(t), S_2(t)) \\ &\quad + \rho S_1(t) S_2(t) \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 V(S_1(t), S_2(t))] dt \\ &\quad + S_1(t) \sigma_1 \partial_1 V(S_1(t), S_2(t)) dW_1^*(t) \\ &\quad + S_2(t) \sigma_2 \partial_2 V(S_1(t), S_2(t)) dW_2^*(t). \end{aligned} \tag{22}$$

Aus der Theorie des optimalen Stoppens ist bekannt, dass der diskontierte Preisprozess $(e^{-rt} V(S_1(t), S_2(t)))_{0 \leq t}$ ein \mathbb{P}^* -Supermartingal ist. Genauer gesagt, ist $(e^{-rt} V(S_1(t), S_2(t)))_{0 \leq t}$

ein Martingal auf dem Fortsetzungsgebiet C und ein Supermartingal auf S . Dies lässt sich konkret als Bedingung an die Drift in den eckigen Klammern aus (22) formulieren. Außerdem sollte der Wert der Funktion stets größer als die aktuelle Auszahlung der Funktion sein. Da das Aussehen von Stopp- und Fortsetzungsgebiet im Vorfeld nicht bekannt ist, ergibt sich in Gleichungen ausgedrückt damit der PDE-Ansatz als freies Randwertproblem

$$\begin{aligned}
 0 &\geq s_1(r - \delta_1)\partial_1 V + s_2(r - \delta_2)\partial_2 V + \frac{1}{2}s_1^2\sigma_1^2\partial_1^2 V + \frac{1}{2}s_2^2\sigma_2^2\partial_2^2 V \\
 &\quad + \rho s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 V - rV, \\
 0 &= (s_1(r - \delta_1)\partial_1 V + s_2(r - \delta_2)\partial_2 V + \frac{1}{2}s_1^2\sigma_1^2\partial_1^2 V + \frac{1}{2}s_2^2\sigma_2^2\partial_2^2 V \\
 &\quad + \rho s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 V - rV)(V - h), \\
 0 &\leq V - h
 \end{aligned}$$

für $t \geq 0$. Dieses Randwertproblem könnte nun als Ansatz für eine numerische Lösungsmethode genutzt werden. Allerdings sind im Allgemeinen Probleme dieser Art selbst numerisch schwer zu bestimmen und besitzen nicht unbedingt eine Lösung in geschlossener Form. In diesem Abschnitt soll nun eine weitere spezielle Methode zum Lösen solcher stochastischer Maximierungsprobleme vorgestellt werden. Die Grundidee dieser Methode soll dabei zunächst erläutert werden. Weiter soll eine Veranschaulichung am Beispiel eines Perpetual-American-Puts stattfinden. Im Anschluss soll die Methode dann auf das vorliegende Problem der Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option angewandt werden. Die Methode selbst geht zurück auf Beibel/Lerche (1997) und die folgende Erläuterung ihrer Grundidee orientiert sich an Abschnitt 1 aus [1].

2.1 Die Methode von Beibel/Lerche

Gegeben sei ein nichtnegativer, stochastischer Prozess $Z = (Z_t)_{0 \leq t < \infty}$. Ziel soll es sein, für diesen vorliegenden Prozess, den Ausdruck $\sup_{\tau} \mathbb{E}[Z_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}]$ über alle Stoppzeiten τ zu maximieren. Dabei ist τ eine Stoppzeit bezüglich der von Z erzeugten Filtration \mathcal{F} , wobei im Falle $\tau = \infty$ folgen soll, dass $Z_{\tau} = 0$. Für die Methode von Beibel/Lerche sucht man nach einer Darstellung des Prozesses Z in der Form $Z_t = g(Y_t)M_t$. In dieser Darstellung soll $Y = (Y_t)_{0 \leq t < \infty}$ ein weiterer bezüglich \mathcal{F} adaptierter stochastischer Prozess sein. Weiter ist g eine Funktion mit einem eindeutigen Maximum in einem Punkt y^* und $M = (M_t)_{0 \leq t < \infty}$ ist ein positives Martingal mit $M_0 = 1$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt für alle $t \geq 0$ aufgrund der Eindeutigkeit des Maximums von g , dass $Z_t \leq g(y^*)M_t$. Die zentrale Idee hinter der Methode von Beibel/Lerche besteht darin, den Prozess bei Erreichen des Maximums der Funktion g zu stoppen. Dabei muss

garantiert werden, dass dieses Maximum tatsächlich erreicht wird. Zu diesem Zweck findet ein Maßwechsel zu einem zu \mathbb{P} absolut stetigen Maß \mathbb{Q} statt, unter dem die Stoppzeit $\tau^* := \inf\{t \geq 0 : Y_t = y^*\}$ fast sicher endlich ist. Die Methode soll detailliert in folgendem Satz festgehalten werden.

Satz 2.1.1. *(Die Technik von Beibel/Lerche) Gegeben sei ein nichtnegativer stochastischer Prozess $Z = (Z_t)_{0 \leq t < \infty}$ mit $Z_t = g(Y_t)M_t$ für alle $t \geq 0$. Dabei sei $(Y_t)_{0 \leq t}$ ein adaptierter stochastischer Prozess, $(M_t)_{0 \leq t}$ ein positives Martingal mit $M_0 = 1$ und g eine Funktion mit einem eindeutigen Maximum in einem Punkt y^* . Weiter sei die Stoppzeit τ^* definiert durch $\tau^* := \inf\{t \geq 0 : Y_t = y^*\}$. Für $0 \leq t < \infty$ sei das Maß \mathbb{Q} definiert durch $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} := M_t$. Gilt nun $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$, so ist τ^* eine optimale Stoppzeit für das stochastische Maximierungsproblem $\sup_{\tau} \mathbb{E}[Z_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$ und es gilt $\sup_{\tau} \mathbb{E}[Z_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = g(y^*)$.*

Beweis: Da die Funktion g ein eindeutiges Maximum in y^* besitzt, gilt nach Voraussetzung $Z_t \leq g(y^*)M_t$ für alle $t \geq 0$. Daraus ergibt sich für jede Stoppzeit τ die Abschätzung $\mathbb{E}[Z_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \leq g(y^*)\mathbb{E}[M_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \leq g(y^*)$. Die letzte Ungleichheit lässt sich dabei mit Hilfe von Fatou's Lemma und dem Optional Sampling Theorem herleiten. Damit ergibt sich $\mathbb{E}[M_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_{\tau \wedge t}] = 1$ und man bekommt durch $g(y^*)$ eine Abschätzung nach oben. Da die Stoppzeit τ^* unter dem Maß \mathbb{Q} fast sicher erreicht wird, erhält man

$$\mathbb{E}[Z_{\tau^*} \mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}] = \mathbb{E}[g(Y_{\tau^*})M_{\tau^*} \mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}] = g(y^*)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}] = g(y^*).$$

Unter den Voraussetzungen maximiert τ^* somit den Ausdruck $\sup_{\tau} \mathbb{E}[Z_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$ und es gilt

$$\sup_{\tau} \mathbb{E}[Z_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = g(y^*).$$

□

Diese Methode von Beibel/Lerche funktioniert besonders gut bei Maximierungsproblemen mit exponentieller Diskontierung wie etwa dem Problem der Optionspreisfindung im vorliegenden Fall der Exchange-Option. Die eigentliche Schwierigkeit dieser Technik besteht darin, eine geeignete Darstellung des Prozesses in der Form $Z_t = g(Y_t)M_t$ überhaupt zu finden. Eine solche Zerlegung in eine geeignete Funktion g , einen Prozess Y und ein passendes Martingal ist in den meisten Fällen nicht unbedingt offensichtlich. Weiter ist überhaupt die Existenz einer geeigneten Zerlegung für diese Technik nicht direkt ersichtlich. Wie sich zeigen wird, ist auch bei der Exchange-Option zunächst nicht klar, wie die geeignete Darstellung zur Anwendung der Methode aussehen sollte.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass man durch $\tau^* := \inf\{t \geq 0 : Y_t = y^*\}$ zunächst nur eine Art Schwelle zwischen Stoppgebiet und Fortsetzungsgebiet der Option erhält. Dadurch muss im Anschluss an die Zerlegung immer noch genauer begründet werden, wie Stoppgebiet und Fortsetzungsgebiet konkret aussehen.

Beispiel: Perpetual-American-Put-Option

Zum besseren Verständnis soll die Anwendung der Methode von Beibel/Lerche zunächst am Beispiel der Perpetual-American-Put-Option demonstriert werden, bevor sie zur Bewertung der Exchange-Option herangezogen wird. Die folgenden Ausführungen orientieren sich am Beispiel 2.1 aus [1]. Dazu sei ein eindimensionales dividendenfreies Black-Scholes-Modell gegeben. Der Einfachheit halber seien die Bezeichnungen in diesem Modell bis auf das Wegfallen der Indizes vollkommen identisch mit dem im vorherigen Kapitel eingeführten zweidimensionalen Modell. Die Auszahlungsfunktion einer Put-Option auf die Aktie S mit Strike $K > 0$ ist dann gegeben durch $g(S(t)) = (K - S(t))^+$. Die Aufgabe bei der Put-Option besteht also konkret darin, eine Stoppzeit τ^* zu finden, die den Ausdruck

$$\mathbb{E}^*[e^{-r\tau^*} (K - S(\tau^*))^+ \mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}]$$

über alle Stoppzeiten maximiert. Wie bereits erwähnt, funktioniert die Methode bei solchen Problemen mit exponentieller Diskontierung besonders gut. Zu Beginn soll der Prozess $Z_t := e^{-rt(K-S(t))^+}$ zerlegt werden. Die Idee ist dabei, eine konstante $\theta \in \mathbb{R}$ so zu wählen, dass $M_t := e^{-rt} \left(\frac{S(t)}{s}\right)^{-\theta}$ ein \mathbb{P}^* -Martingal ist, wobei $s > 0$ den Startwert der Aktie bezeichnet. Dann ist M_t ein Martingal mit Startwert $M_0 = 1$ und der Prozess Z kann zerlegt werden durch

$$Z_t = e^{-rt} \left(\frac{S(t)}{s}\right)^{-\theta} \left(\frac{S(t)}{s}\right)^{\theta} (K - S(t))^+ = M_t g(S(t))$$

mit $g(y) = \left(\frac{y}{s}\right)^{\theta} (K - y)^+$. Falls $\theta > 0$ gilt, hat die Funktion g ein eindeutiges Maximum im Punkt $y^* = \frac{\theta K}{\theta + 1}$. Die Bewertung der Option soll in folgendem Satz zusammengefasst werden:

Satz 2.1.2. *In einem dividendenfreien Black-Scholes-Modell mit konstanter Zinsrate $r > 0$ ist der Wert V einer Perpetual-American-Put-Option mit Strike $K > 0$ und*

Aktienstartpreis s gegeben durch

$$V(s, K) = \begin{cases} \frac{1}{\theta+1} \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^\theta K^{1+\theta} s^{-\theta} & \text{falls } s > y^*, \\ K - s & \text{falls } s \leq y^* \end{cases}$$

mit $\theta = \frac{2r}{\sigma^2}$ und $y^* = \frac{\theta K}{\theta+1}$. Außerdem ist $\tau^* := \inf\{t > 0 | S(t) \leq y^*\}$ eine optimale Stoppzeit in dieser Situation.

Beweis: Der Prozess Z_t soll, wie oben beschrieben, zerlegt werden. Dabei ist das θ so zu bestimmen, dass $M_t := e^{-rt} \left(\frac{S(t)}{s}\right)^{-\theta}$ ein \mathbb{P}^* -Martingal wird. Dies gilt sowohl bei der offensichtlichen Lösung $\theta_1 = -1$ als auch bei der weiteren Lösung $\theta_2 = \frac{2r}{\sigma^2}$. Im Weiteren wird nur noch die Lösung $\theta = \frac{2r}{\sigma^2}$ betrachtet, da die Funktion g nur für dieses der beiden möglichen θ überhaupt ein Maximum besitzt. Definiert man das Maß \mathbb{Q} durch

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} := M_t = e^{-\frac{2r^2}{\sigma^2}t + (-\frac{2r}{\sigma})W(t)} \quad \text{für } 0 \leq t < \infty,$$

so ist nach Girsanov der Prozess $W^{\mathbb{Q}}(t) := W(t) + \frac{2r}{\sigma}t$ ein Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{Q} . Somit lässt sich der Aktienpreisprozess als $S(t) = s e^{(-r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t)}$ schreiben. Wegen $r > 0$ ist S eine geometrische Brownsche Bewegung mit negativer Drift bezüglich \mathbb{Q} . Aufgrund der Definition von τ^* folgt daraus dann direkt $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$. Insgesamt ergibt sich für den Wert der Option bei einem Startwert $s > y^*$ dann

$$\begin{aligned} V(s, K) &= \sup_{\tau} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau} (K - S(\tau))^+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \\ &= \sup_{\tau} \mathbb{E}^* \left[e^{-r\tau} \left(\frac{S(\tau)}{s}\right)^{-\theta} \left(\frac{S(\tau)}{s}\right)^{\theta} (K - S(\tau))^+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \right] \\ &= \sup_{\tau} \mathbb{E}^* [M_{\tau} g(S(\tau)) \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [g(S(\tau^*)) \mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}] \\ &= g(S(\tau^*)) = \frac{1}{\theta+1} \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{\theta} K^{1+\theta} s^{-\theta}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$ den Erwartungswert unter \mathbb{Q} . Für Startwerte $s > y^*$ ist dann Warten bis zum Erreichen der Schwelle y^* die optimale Ausübungsstrategie. Es bleibt noch zu begründen, dass bei Startwerten mit $s \leq y^*$ sofortiges Stoppen zu der maximalen erwarteten Auszahlung führt. Dazu ist zu zeigen, dass sich durch längeres Warten im Mittel keine höhere Auszahlung erreichen lässt. Genauer ist zu prüfen, ob die Wertfunktion r -superharmonisch ist, d. h., dass $Ah \leq rh$. Auf diese Eigenschaft soll erst im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit der Exchange-Option genauer eingegangen werden. Im Fall der Put-Option kann die r -Superharmonität dann auf ähnliche Weise

wie bei der Exchange-Option gezeigt werden. \square

2.2 Anwendung auf die Perpetual-American-Exchange-Option

Im Folgenden soll noch geklärt werden, inwiefern sich die Methode von Beibel/Lerche zur Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option eignet. Da der Wert der Option durch

$$V(s_1, s_2) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau} (S_1(\tau) - S_2(\tau))^+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$$

gegeben ist, besteht das Ziel darin, den Prozess $Z_t := (e^{-rt}(S_1(t) - S_2(t))^+)_{t \geq 0}$ geschickt zu zerlegen. Dabei liegt im Folgenden der Fokus darauf, ein geeignetes Martingal M für die in der Grundidee beschriebene Zerlegung zu finden. Dazu wird zunächst angenommen, dass dieses Martingal von der Form $M_t := e^{-rt} f(S_1(t), S_2(t))$ für eine C^2 -Funktion f ist. Zur genaueren Bestimmung von f wird der Erzeuger des Prozesses $(S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ herangezogen. Eine ausführliche Erläuterung des Erzeugers von Markovprozessen ist in Kapitel 1 von [3] zu finden. Der Erzeuger A eines Prozesses ist ein Differentialoperator und wird dadurch definiert, dass für jede C^2 -Funktion f der Prozess

$$\left(f(S_1(t), S_2(t)) - \int_0^t Af(S_1(u), S_2(u)) du \right)_{0 \leq t}$$

ein lokales Martingal beschreibt. Für den Prozess $(S_1(t), S_2(t))_{0 \leq t}$ lässt sich A genauer bestimmen. Für eine beliebige C^2 -Funktion f liefert hier die Itô-Formel

$$\begin{aligned} df &= \partial_1 f dS_1(t) + \partial_2 f dS_2(t) + \frac{1}{2} \partial_1^2 f d\langle S_1 \rangle_t + \frac{1}{2} \partial_2^2 f d\langle S_2 \rangle_t + 2 \cdot \frac{1}{2} \partial_{12}^2 f d\langle S_1, S_2 \rangle_t \\ &= \partial_1 f S_1(t) ((r - \delta_1) dt + \sigma_1 dW_1^*(t)) + \partial_2 f S_2(t) ((r - \delta_2) dt + \sigma_2 dW_2^*(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_1^2 f S_1^2(t) \sigma_1^2 dt + \frac{1}{2} \partial_2^2 f S_2^2(t) \sigma_2^2 dt + \partial_{12}^2 f \rho S_1(t) S_2(t) \sigma_1 \sigma_2 dt \\ &= [S_1(t)(r - \delta_1) \partial_1 f + S_2(t)(r - \delta_2) \partial_2 f + \frac{1}{2} S_1^2(t) \sigma_1^2 \partial_1^2 f + \frac{1}{2} S_2^2(t) \sigma_2^2 \partial_2^2 f \\ &\quad + \rho S_1(t) S_2(t) \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 f] dt + S_1(t) \sigma_1 \partial_1 f dW_1^*(t) + S_2(t) \sigma_2 \partial_2 f dW_2^*(t). \end{aligned}$$

In der Rechnung wurden für eine übersichtlichere Darstellung die Argumente von f nicht aufgeführt. Der Erzeuger ist dann gegeben durch

$$Af(x_1, x_2) = x_1(r - \delta_1) \partial_1 f + x_2(r - \delta_2) \partial_2 f + \frac{1}{2} x_1^2 \sigma_1^2 \partial_1^2 f + \frac{1}{2} x_2^2 \sigma_2^2 \partial_2^2 f + \rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 f, \quad (23)$$

denn so wird durch $(f(S_1(t), S_2(t)) - \int_0^t Af(S_1(u), S_2(u)) du)_{0 \leq t}$ ein lokales Martingal definiert. Weiter ist nun $(e^{-rt} f(S_1(t), S_2(t)))_{0 \leq t}$ ein lokales Martingal genau dann, wenn f eine r -harmonische Funktion ist, d. h., wenn $Af = rf$ gilt. Genauer wird also eine Funktion f gesucht, welche die Differentialgleichung

$$x_1(r - \delta_1)\partial_1 f + x_2(r - \delta_2)\partial_2 f + \frac{1}{2}x_1^2\sigma_1\partial_1^2 f + \frac{1}{2}x_2^2\sigma_2\partial_2^2 f + \rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \partial_{12}^2 f = rf$$

erfüllt. Eine geeignete Lösung dieser Differentialgleichung soll im Folgenden mit einem speziellen Separationsansatz gefunden werden. Dabei wird angenommen, dass die Funktion f von der Form $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ ist. Es sollen also α und β so bestimmt werden, dass $Af = rf$ erfüllt ist. Durch Einsetzen dieser Form von f ergibt sich

$$\begin{aligned} Af &= x_1(r - \delta_1)\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta + x_2(r - \delta_2)\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x_1^2 (\alpha - 1)\alpha x_1^{\alpha-2} x_2^\beta \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x_2^2 (\beta - 1)\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-2} + \rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ &= (r - \delta_1)\alpha f + (r - \delta_2)\beta f + \frac{1}{2}\sigma_1^2 (\alpha - 1)\alpha f + \frac{1}{2}\sigma_2^2 (\beta - 1)\beta f + \rho\sigma_1\sigma_2 \alpha\beta f \\ &= [(r - \delta_1)\alpha + (r - \delta_2)\beta + \frac{1}{2}\sigma_1^2 (\alpha - 1)\alpha + \frac{1}{2}\sigma_2^2 (\beta - 1)\beta + \rho\sigma_1\sigma_2 \alpha\beta] \cdot f. \end{aligned} \quad (24)$$

Der Term in den eckigen Klammern in (24) soll dabei mit der Zinsrate r übereinstimmen. Zusammengefasst erhält man für jede Lösung (α, β) der Gleichung

$$(r - \delta_1)\alpha + (r - \delta_2)\beta + \frac{1}{2}\sigma_1^2 (\alpha - 1)\alpha + \frac{1}{2}\sigma_2^2 (\beta - 1)\beta + \rho\sigma_1\sigma_2 \alpha\beta = r \quad (25)$$

eine r -harmonische Funktion. Wählt man ein beliebiges α , so wird die Gleichung (25) zu einer quadratischen Gleichung in β . Zu jedem α existieren demnach durch diese quadratische Gleichung zwei möglicherweise komplexe β_1 und β_2 , sodass $e^{-rt} x_1^\alpha x_2^{\beta_i}$ ein lokales Martingal ist für $i = 1, 2$. Dadurch erhält man dann eine Menge möglicher Martingale für eine Zerlegung. Diese Menge soll im Folgenden aber noch weiter eingeschränkt werden. Der Grund dafür ist, dass nicht jede Lösung der Gleichung ein zur Zerlegung geeignetes Martingal liefert. Dies hängt damit zusammen, dass bei fester Wahl des Martingals M_t bei der Zerlegung $Z_t = g(Y_t)M_t$ gelten muss. Dadurch werden also die Funktion g und der Prozess $(Y_t)_{0 \leq t}$ ebenfalls genauer festgelegt. Das Problem besteht nun darin, dass die daraus resultierende Funktion g nicht unbedingt für jede Lösung der Gleichung (25) ein Maximum besitzen muss. Bei Betrachtung der Auszahlungsfunktion $h(S_1(t), S_2(t)) := e^{-rt}(S_1(t) - S_2(t))^+$ der Option fällt auf, dass diese positiv linear homogen in beiden Variablen ist, also homogen vom Grad 1 ist, d. h., es gilt $\lambda h(S_1(t), S_2(t)) = h(\lambda S_1(t), \lambda S_2(t))$ für alle $\lambda > 0$. Da nach der Zerlegung

$h(S_1(t), S_2(t)) = g(Y_t)e^{-rt}f(S_1(t), S_2(t))$ gilt, sollte für f zusätzlich gefordert werden, dass f linear homogen in beiden Variablen ist. Andernfalls hätte die Funktion g ebenfalls einen homogenen Anteil und damit kein eindeutiges Maximum. Es wird sich zeigen, dass diese Forderung an f ausreicht, um ein für die Zerlegung geeignetes Martingal M_t zu erhalten. Sei also im Folgenden die Funktion f zusätzlich als linear homogen in beiden Variablen vorausgesetzt. Nach Eulers Satz über homogene Funktionen erfüllt f dann die Differentialgleichung

$$f(x_1, x_2) = x_1 \partial_1 f(x_1, x_2) + x_2 \partial_2 f(x_1, x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Setzt man an dieser Stelle wieder den ursprünglichen Ansatz $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ ein, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta + x_2 \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} \\ &= \alpha f(x_1, x_2) + \beta f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Daraus folgt dann die Bedingung $\beta = 1 - \alpha$, d. h., f sollte von der Form $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{\alpha-1}$ sein, wobei $(\alpha, 1 - \alpha)$ nach wie vor Lösung der Gleichung (25) sein sollte, damit $e^{-rt} S_1^\alpha(t) S_2^{\alpha-1}$ ein Martingal ist. Unter der Bedingung $\beta = 1 - \alpha$ vereinfacht sich (25) zu

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \alpha (1 - \alpha) + \alpha \delta_1 + (1 - \alpha) \delta_2 = 0, \quad (26)$$

wobei σ wieder gegeben ist durch $\sigma := \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$. Die Lösungen der quadratischen Gleichung (26) sollen im Folgenden und auch im nächsten Kapitel mit θ_+ und θ_- bezeichnet werden. Sie sind gegeben durch

$$\theta_+ := \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}} \quad (27)$$

und

$$\theta_- := \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}.$$

Insbesondere sei hierbei erwähnt, dass die Lösungen unabhängig von der Zinsrate r sind, und die Werte von θ_+ und θ_- nur von den Dividendenzahlungen und den Volatilitäten der Aktien abhängen. Mit Hilfe von θ_\pm sind dann zwei Martingale der Form $(e^{-rt} S_1^{\theta_\pm}(t) S_2^{1-\theta_\pm}(t))_{0 \leq t}$ gegeben. Damit das Martingal M auch die für die Beibel/Lerche-

Zerlegung notwendige Bedingung $M(0) = 1$ erfüllt, sollten die Aktienpreisprozesse noch durch ihren Startwert zum Zeitpunkt $t = 0$ normiert werden. Dadurch erhält man dann zwei mögliche Kandidaten für die Bewertung der Option durch die Methode von Beibel/Lerche. Diese lassen sich angeben durch

$$M_t^\pm := e^{-rt} \left(\frac{S_1(t)}{s_1} \right)^{\theta_\pm} \left(\frac{S_2(t)}{s_2} \right)^{1-\theta_\pm}.$$

Es sei bereits angemerkt, dass sich nicht in jeder Situation die Bewertungstechnik von Beibel/Lerche für die Perpetual-American-Exchange-Option anwenden lässt, da beispielsweise die Lösungen θ_+ und θ_- komplex sein können, und für die daraus resultierende Funktion g in diesem Fall kein Maximum definiert ist. Somit erhält man schon jetzt den Eindruck, dass die Werte von θ_+ und θ_- eine große Rolle in der Bewertung der Option spielen. Der Einfluss von θ_\pm auf den Wert der Option und die daraus resultierende Bewertungstrategie soll im nächsten Kapitel genau untersucht werden.

2.3 Die Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option

In diesem Kapitel soll nun die Perpetual-American-Exchange-Option bewertet werden. Bei dieser Option handelt es sich wie bereits erwähnt um eine Exchange-Option mit unendlicher Laufzeit, welche zu jedem beliebigen Zeitpunkt eingelöst werden kann. Bei der Bewertung wird sich herausstellen, dass unterschiedliche Dividendenzahlungen einen großen Einfluss auf den Wert der Option und auch auf das strategische Vorgehen bei der Bewertung haben. Daher werden in diesem Kapitel unterschiedliche Methoden zur Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option vorgestellt und durchgeführt. Im gesamten Kapitel soll diese Option im zweidimensionalen Black-Scholes-Modell betrachtet werden, d. h., sämtliche Parameter des Modells werden als konstant vorausgesetzt. Zunächst soll eine Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option für den speziellen Fall stattfinden, in dem die erste Aktie keine Dividenden zahlt. Dividendenzahlungen der zweiten Aktie werden dabei bereits in einem beschränkten Bereich zugelassen. Dabei ist auch die Bewertung der Option in einem dividendenfreien Modell eingeschlossen. Im Anschluss daran werden strikt positive Dividenden angenommen. Dies ist der in der Literatur am häufigsten behandelte Fall. Hierfür soll eine Möglichkeit gefunden werden, die Bewertungstechnik von Beibel/Lerche aus dem vorherigen Abschnitt auf diese spezielle Option anzuwenden. Es wurde bereits ein erster Ansatz für diese Anwendung in 2.2 diskutiert. Nachdem die Bewertung für positive Dividenden abgeschlossen ist, sollen weitere Fälle möglicher Kombinationen aus Dividendenzahlungen betrachtet werden. Dabei wird die gesamte Menge an möglichen Dividendenzahlungen betrachtet und in strategisch sinnvolle Fälle unterteilt. Ausschlaggebend für eine Ein-

teilung in unterschiedliche Fälle werden dabei die Werte von θ_+ und θ_- aus Abschnitt 2.2 sein. Für diese erfolgt dann nacheinander eine Bewertung der Option. Falls möglich wird die Bewertung auch hier mit der Methode von Beibel/Lerche durchgeführt. Die Einteilung möglicher Fälle von Dividendenzahlungen und die Durchführung der Bewertung in einigen Fällen stützt sich dabei auf die Ausführungen in [15]. An verschiedenen Stellen dieses Kapitels wird zusätzlich versucht durch Abbildungen die Situation zu veranschaulichen. Sämtliche Abbildungen und Tabellen orientieren sich dabei ebenfalls an den Abbildungen aus [15]. Sie sind jedoch selbstständig in veränderter Form angefertigt.

2.3.1 Der erweiterte dividendenfreie Fall

Hier soll eine Bewertung der Option stattfinden, für den Fall, dass keine der beiden Aktien eine Dividende zahlt. Genauer gesagt, wird bereits mehr als nur dieser Fall betrachtet. Analog zum Fall (A1) in Abschnitt 3 aus [15] seien die Dividenden δ_i für $i = 1, 2$ im Folgenden eingeschränkt durch $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 > -\frac{\sigma^2}{2}$, wobei $\sigma^2 := \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$. Die erste Aktie zahlt also tatsächlich keine Dividende, und für die zweite Aktie wird der dividendenfreie Fall berücksichtigt. Der genaue Grund für diese Einteilung wird jedoch erst in Abschnitt 2.3.3 ersichtlich. Dass für δ_2 bereits andere Werte als 0 zugelassen werden, ändert weder etwas am Wert der Option noch an der optimalen Ausübungsstrategie, wie sich im Folgenden zeigen wird. Führt man sich die Bewertungssituation konkret vor Augen, so ist der diskontierte Preisprozess der ersten Aktie hier ein Martingal bezüglich des risikoneutralen Maßes \mathbb{P}^* , wodurch diese über die Zeit in Erwartung keinen Wertverlust hat. Bei einer positiven Dividende der zweiten Aktie ist deren Preisprozess hingegen ein Supermartingal, welches durch langes Warten im Mittel beliebig nah gegen Null läuft. Damit wäre intuitiv der Anfangspreis der ersten Aktie ein fairer Preis der Option, damit keine Arbitrage entsteht. Der folgende Satz soll nun zeigen, dass diese Annahme tatsächlich richtig ist und sogar noch gilt, falls die Dividendenzahlungen der zweiten Aktie in einem begrenzten negativen Bereich liegen.

Satz 2.3.1. [15, Theorem 2. (a)] *Gilt $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 > -\frac{\sigma^2}{2}$, so ist der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option gegeben durch $V(s_1, s_2) = s_1$. Genauer gesagt existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{(n)} = \infty$ fast sicher (f.s.) und*

$$V(s_1, s_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^*[e^{-r\tau^{(n)}}(S_1(\tau^{(n)}) - S_2(\tau^{(n)}))^+ \mathbf{1}_{\{\tau^{(n)} < \infty\}}] = s_1.$$

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, dass $V(s_1, s_2) \leq s_1$. Dies folgt direkt aus $\delta_1 = 0$

durch

$$\begin{aligned}
 V(s_1, s_2) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau} (S_1(\tau) - S_2(\tau))^+] \\
 &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau} S_1(\tau)] \\
 &= s_1 \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^* [e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}\tau + \sigma_1 W_1^*(\tau)}] \\
 &\leq s_1.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Da der diskontierte Preisprozess der Aktie ein \mathbb{P}^* -Martingal ist, folgt die letzte Abschätzung in (28) aus dem Optional-Sampling-Theorem und Fatou's Lemma, denn für jede Stoppzeit τ gilt

$$\mathbb{E}^* [e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}\tau + \sigma_1 W_1^*(\tau)}] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}(\tau \wedge t) + \sigma_1 W_1^*(\tau \wedge t)}] = 1.$$

Nun definiere eine Folge $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher Stoppzeiten durch $\tau^{(n)} = n$. Zeigt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-rn} (S_1(n) - S_2(n))^+] = s_1, \tag{29}$$

so folgt bereits die Aussage des Satzes. Mit anderen Worten wird hier der Wert der europäischen Exchange-Option bei wachsendem Abstand bis zur Fälligkeit betrachtet. Der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option sollte dabei größer sein als der Wert jeder europäischen Option. Mit der Stoppstrategie $\tau^{(n)} = n$ entspricht die perpetual Option genau einer europäischen Option mit Maturität n . Es soll nun gezeigt werden, dass man durch immer längeres Warten im Erwartungswert beliebig nah an den Startwert der ersten Aktie herankommt. Somit würde jeder Preis für die Option unter s_1 die Arbitragefreiheit verletzen. Also folgt $V(s_1, s_2) = s_1$, wenn (29) gezeigt ist. Für den Preis der europäischen Option gilt

$$V_e(s_1, s_2, n) = s_1 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (\delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right) - s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2})n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right). \tag{30}$$

Der Minuend und der Subtrahend aus (30) sollen nun getrennt voneinander genauer betrachtet werden. Betrachte also den Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_1 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (\delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right). \tag{31}$$

Da $\delta_2 > -\frac{\sigma^2}{2}$ konvergiert in (31) der Ausdruck in der Verteilungsfunktion gegen ∞ für

$n \rightarrow \infty$ und somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-rn} S_1(n) \mathbb{1}_{\{S_1(n) > S_2(n)\}}] = s_1. \quad (32)$$

Damit die Behauptung folgt, muss also noch gezeigt werden, dass der Subtrahend in (30) gegen 0 konvergiert für $n \rightarrow \infty$. Schreibe dazu kurz

$$\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \left(\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)n}{\sqrt{\sigma^2 n}} =: z(n)$$

und betrachte die Konvergenz des Terms $\lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(z(n))$ genauer mit Hilfe einer Fallunterscheidung.

1. Fall: $\delta_2 > 0$.

Für $\delta_2 > 0$ und $n \rightarrow \infty$ konvergiert $e^{-\delta_2 n} \rightarrow 0$ und die Verteilungsfunktion ist durch 0 und 1 beschränkt. Also gilt insgesamt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(z(n)) = 0$.

2. Fall: $\delta_2 = 0$.

Ist $\delta = 0$, so gilt für $n \rightarrow \infty$, dass $z(n) \rightarrow -\infty$, und somit gilt auch in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(z(n)) = 0$.

3. Fall: $-\frac{\sigma^2}{2} < \delta_2 < 0$.

Dies ist der eigentlich interessante Fall, da hier ebenfalls $\Phi(z(n)) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, die Exponentialfunktion aber gegen ∞ konvergiert. Die Strategie besteht im Folgenden darin, die Dichtefunktion der Normalverteilung durch eine integrierbare Majorante nach oben abzuschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(z(n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z(n)} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z(n)} -x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z(n))^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2}{2\sigma^2 n} - \frac{\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right)\left(\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\delta_2 n - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 n}. \end{aligned} \quad (34)$$

Entscheidend für die Konvergenz ist der letzte Exponent in (34). Bei genauerer Betrachtung gilt $-\delta_2 n - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 n \leq 0$ für alle δ_2 . Fasst man die linke Seite dieser Ungleichung als Funktion in δ_2 auf, so ist dies eine nach unten geöffnete Parabel mit nur einer Nullstelle bei $\delta_2 = -\sigma^2/2$. Somit ist die Ungleichung für $-\frac{\sigma^2}{2} < \delta_2 < 0$ strikt und es folgt die Konvergenz gegen 0 für $n \rightarrow \infty$ auch in diesem Fall. Daraus folgt dann

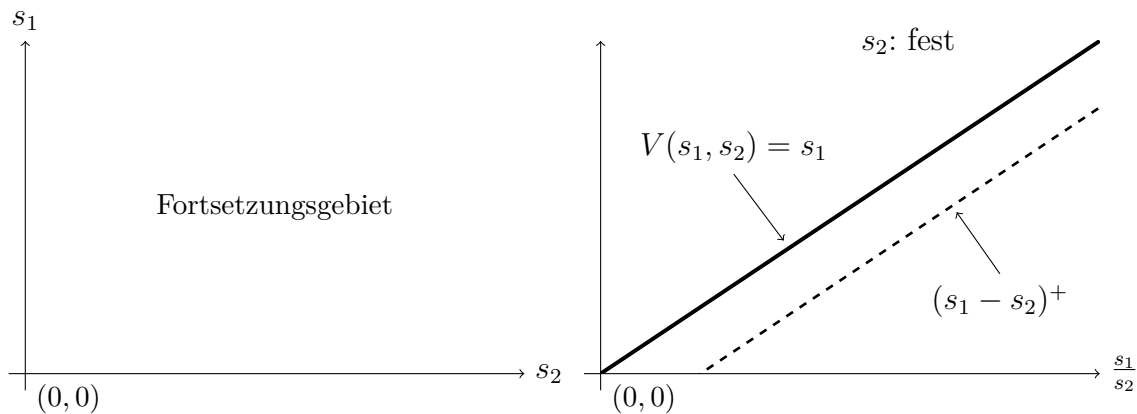


Abbildung 1: Das Stoppgebiet und die Wertfunktion im dividendenfreien Fall

auch, dass $V(s_1, s_2) = s_1$. □

In Abbildung 1 wird noch einmal die Wertfunktion der Option im erweiterten dividendenfreien Fall skizziert. Dabei wurde zu Beginn ein bestimmtes s_2 fest gewählt. Durch diese Wahl lässt sich dann der Wert der Option als Funktion des Verhältnisses $\frac{s_1}{s_2}$ der Aktienpreise zweidimensional darstellen. Der rechte Teil der Abbildung veranschaulicht, dass der Wert der Funktion stets höher als die aktuelle Auszahlung ist. Dementsprechend ist eine Ausübung zu jedem Zeitpunkt ungünstig, wodurch das Fortsetzungsgebiet die gesamte (s_1, s_2) -Ebene einnimmt. Das Stoppgebiet ist in diesem Fall leer. Warum in diesem Fall die Bewertung nicht mit der Methode von Beibel/ Lerche durchgeführt werden konnte, wird sich im Weiteren noch zeigen.

2.3.2 Positive Dividenden

Im Folgenden soll nun die Perpetual-American-Exchange-Option bewertet werden, falls beide Aktien strikt positive Dividenden zahlen. Hierzu soll die im vorherigen Kapitel vorgestellte Methode von Beibel/Lerche auf das Bewertungsproblem angewandt werden. Dabei soll sowohl ein arbitragefreier Preis als auch eine optimale Stoppstrategie für die Option angegeben werden. Sei in diesem Abschnitt also $\delta_i > 0$ für $i = 1, 2$ vorausgesetzt. Das Ziel besteht hier darin, den Ausdruck

$$\mathbb{E}^*[e^{-r\tau}(S_1(\tau) - S_2(\tau))^+] \tag{35}$$

über alle Stoppzeiten τ zu maximieren. Durch die Annahme der positiven Dividendenzahlungen sind hier die diskontierten Preisprozesse beider Aktien \mathbb{P}^* -Supermartingale, wodurch bei langem Warten bis zur Ausübung der Option die erwartete Höhe der Auszahlung gegen Null läuft. Die Auszahlung der Option ist bei geeigneter Stoppstrategie offensichtlich mit positiver Wahrscheinlichkeit größer als Null und kann insbesondere

nicht negativ werden. Intuitiv existiert somit eine gewisse Schwelle, bei deren Erreichen das Einlösen der Option optimal ist. Aus der Sicht von Beibel/Lerche ist hier eine geeignete Darstellung des stochastischen Prozesses $Z_t := e^{-rt}(S_1(t) - S_2(t))^+$ zu finden, sodass $Z_t = g(Y_t)M_t$ für $0 \leq t < \infty$, wobei g eine Funktion mit eindeutigen Maximum ist, Y ein stochastischer Prozess und M ein Martingal bezüglich \mathbb{P}^* mit $M(0) = 1$. Wie bereits im vorherigen Kapitel erwähnt, ist im Falle der Perpetual-American-Exchange-Option eine solche Zerlegung nicht so einfach auf den ersten Blick zu sehen. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, ein geeignetes Martingal zu finden. In 2.2 wurden jedoch bereits die beiden Kandidaten M_+ und M_- für eine mögliche Aufteilung des Prozesses Z erarbeitet. Die Idee für die Bewertung mit diesem Ansatz stammt aus Abschnitt 2 von [5]. In diesem Paper wird die Perpetual-American-Exchange-Option bei positiven Dividendenzahlungen bereits mit Hilfe desselben Martingals bewertet. Jedoch unterscheidet sich der dort benutzte Bewertungsansatz von der Methode von Beibel/Lerche, auf der hier der Fokus liegen soll. Nutzt man also das Martingal M_+ für die Methode, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_t &= e^{-rt}(S_1(t) - S_2(t))^+ \\ &= e^{-rt}(S_1(t) - S_2(t))^+ \left(\frac{S_1(t)}{s_1}\right)^{\theta_+} \left(\frac{S_2(t)}{s_2}\right)^{1-\theta_+} \left(\frac{s_1}{S_1(t)}\right)^{\theta_+} \left(\frac{s_2}{S_2(t)}\right)^{1-\theta_+} \\ &= M^+(t)(S_1(t) - S_2(t))^+ \left(\frac{s_1}{S_1(t)}\right)^{\theta_+} \left(\frac{s_2}{S_2(t)}\right)^{1-\theta_+}. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man als Restterm eine Funktion g in Abhängigkeit der Aktienpreisprozesse S_1 und S_2 als

$$g(S_1(t), S_2(t)) := (S_1(t) - S_2(t))^+ \left(\frac{s_1}{S_1(t)}\right)^{\theta_+} \left(\frac{s_2}{S_2(t)}\right)^{1-\theta_+}.$$

Definiert man dann den Prozess Y durch $Y_t := \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)$, so folgt

$$\begin{aligned} &(S_1(t) - S_2(t))^+ \left(\frac{s_1}{S_1(t)}\right)^{\theta_+} \left(\frac{s_2}{S_2(t)}\right)^{1-\theta_+} \\ &= \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} - 1\right)^+ S_2(t) \left(\frac{S_1(t)}{s_1}\right)^{-\theta_+} \left(\frac{s_2}{S_2(t)}\right)^{1-\theta_+} \\ &= \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} - 1\right)^+ s_2 \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)^{-\theta_+} \\ &= (Y_t - 1)^+ s_2 \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} (Y_t)^{-\theta_+}. \end{aligned}$$

Somit kann die Funktion $g(S_1(t), S_2(t))$ auch einfach umgeschrieben werden zu $g(Y_t)$, da ihr Funktionswert offensichtlich auch in Abhängigkeit vom Quotienten der beiden Aktienpreise dargestellt werden kann. Die Funktion $g(y) = (y - 1)^+ y^{-\theta_+} s_2 \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+}$ besitzt im Falle positiver Dividenden auch tatsächlich ein eindeutiges Maximum, worauf aber im Beweis des nächsten Satzes noch genauer eingegangen werden soll. Damit wäre eine Möglichkeit gefunden, den Prozess Z_t als $Z_t = g(Y_t)M^+(t)$ zu zerlegen. Dass sich diese Zerlegung auch für eine Bewertung mit der Methode von Beibel/Lerche eignet, soll durch den nachfolgenden Satz festgehalten werden.

Satz 2.3.2. *Gilt $\delta_1, \delta_2 > 0$, so ist der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option gegeben durch*

$$V(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{y^* - 1}{(y^*)^{\theta_+}} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} s_2, & \text{für } \frac{s_1}{s_2} < y^* \\ s_1 - s_2, & \text{für } \frac{s_1}{s_2} \geq y^* \end{cases}, \quad (36)$$

dabei ist θ_+ wie in (27) und y^* ist definiert durch $y^* := \frac{\theta_+}{\theta_+ - 1}$. Weiter ist durch

$$\tau^* := \inf\{t > 0 : \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \geq y^*\} \quad (37)$$

eine optimale Stoppzeit für die Option gegeben.

Beweis: Es soll der Ausdruck $\mathbb{E}^*[Z_\tau]$ mit $Z_t = e^{-rt}(S_1(t) - S_2(t))^+$ über alle Stoppzeiten maximiert werden. Zunächst sei wie in Abschnitt 4 von [5] bemerkt, dass $\mathbb{E}^*[Z_\tau] = \mathbb{E}^*[Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$ für alle Stoppzeiten τ gilt, da $\delta_1 > 0$ vorausgesetzt ist, und somit der diskontierte Preisprozess der ersten Aktie eine negative Drift hat. Das heißt, es gilt für $t \rightarrow \infty$, dass $e^{-rt}S_1(t) \rightarrow 0$ fast sicher. Also gilt auch $Z_t \rightarrow 0$ fast sicher für $t \rightarrow \infty$. Der Prozess Z_t lässt sich, wie oben beschrieben, darstellen als $Z_t = g(Y_t)M^+(t)$, mit dem Martingal $M_t^+ = e^{-rt} \left(\frac{S_1(t)}{s_1}\right)^{\theta_+} \left(\frac{S_2(t)}{s_2}\right)^{1-\theta_+}$, der Funktion $g(y) = s_2 \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} y^{-\theta} (y - 1)^+$ und dem Prozess $Y_t = \frac{S_1(t)}{S_2(t)}$. Als nächstes soll die Funktion g genauer betrachtet werden. Zur Anwendung der Methode von Beibel /Lerche wird gefordert, dass diese ein eindeutiges Maximum besitzt. Zunächst ist zu beachten, dass $g(y) = 0$ für $y \leq 1$. Weiter ist $g(y)$ auf dem Bereich $y > 1$ stetig und differenzierbar und besitzt ein eindeutiges Maximum bei $y^* = \frac{\theta_+}{\theta_+ - 1}$. Als größere Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta(1 - \theta) + \theta\delta_1 + (1 - \theta)\delta_2 = 0$$

ist θ_+ größer als 1. Um dies einzusehen, kann man die linke Seite der Gleichung als nach unten geöffnete quadratische Funktion in θ auffassen. Diese hat dann die beiden offensichtlichen Funktionswerte δ_1 für $\theta = 1$ und δ_2 für $\theta = 0$. Da $\delta_1, \delta_2 > 0$ vorausge-

setzt ist, muss eine Nullstelle der Funktion größer als 1 sein und eine kleiner als 0. Mit dieser Überlegung folgt dann $\theta_+ > 1$ und somit gilt auch $y^* > 1$. Damit besitzt g ein eindeutiges Maximum bei y^* . Definiere das Maß \mathbb{Q} durch

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} = M_t^+ \quad \text{für } 0 \leq t \leq \infty$$

und die Stoppzeit τ^* durch $\tau^* := \inf\{t > 0 : Y_t \geq y^*\}$. Im Folgenden soll kurz die Beweisidee genauer erläutert werden. Die Strategie besteht darin, zunächst zu zeigen, dass für Startpunkte (s_1, s_2) mit $\frac{s_1}{s_2} < y^*$ die Stoppzeit τ^* unter \mathbb{Q} fast sicher endlich ist, d. h. $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$. Dann wird der Ausdruck $\mathbb{E}^*[Z_\tau]$ nach Satz 2.1.2 durch die Stoppzeit τ^* für alle Punkte (s_1, s_2) mit $\frac{s_1}{s_2} \in (-\infty, y^*)$ maximiert. Diese Startpunkte lassen sich dadurch bereits dem Fortsetzungsbereich der Option zuordnen. Im Anschluss daran soll noch gezeigt werden, dass das Stoppgebiet von der Form $\{(s_1, s_2) : \frac{s_1}{s_2} \in [y^*, \infty)\}$ ist. Hierzu wird mit Hilfe des Erzeugers von $(S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ gezeigt, dass die Auszahlungsfunktion in diesem Bereich ein Supermartingal ist. Genauer gesagt, wird gezeigt, dass die Auszahlungsfunktion r -super-harmonisch ist und daher sofortiges Stoppen in Erwartung den höchsten Auszahlungsbetrag sichert. Damit wäre insgesamt gezeigt, dass τ^* eine optimale Stoppzeit ist und die Behauptung des Satzes folgt. Neben der Superharmonität bleibt also nur noch $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$ für $\frac{s_1}{s_2} < y^*$ zu zeigen. Definiere dazu die beiden Prozesse $W_1^{\mathbb{Q}}$ und $W_2^{\mathbb{Q}}$ durch

$$\begin{aligned} W_1^{\mathbb{Q}}(t) &= W_1^*(t) - \theta_+ \sigma_1 t - (1 - \theta_+) \sigma_2 \rho t \quad \text{und} \\ W_2^{\mathbb{Q}}(t) &= W_2^*(t) - \theta_+ \sigma_1 \rho t - (1 - \theta_+) \sigma_2 t. \end{aligned}$$

Durch diese Definition sind die Prozesse $W_1^{\mathbb{Q}}$ und $W_2^{\mathbb{Q}}$ nach dem Maßwechsel mit $M_t^+ = e^{-rt - \theta_+ \mu_1 t + (1 - \theta_+) \mu_2 t} e^{\theta_+ \sigma_1 W_1^*(t) + (1 - \theta_+) \sigma_2 W_2^*(t)}$ Wiener-Prozesse bezüglich \mathbb{Q} und sie korrelieren um den Faktor ρ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau^* < \infty) &= \mathbb{Q} \left(\inf \left\{ t \geq 0 \mid \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \geq \frac{\theta_+}{\theta_+ - 1} \right\} < \infty \right) \\ &= 1 - \mathbb{Q} \left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} < \frac{\theta_+}{\theta_+ - 1} \text{ für alle } t \geq 0 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Um $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$ zu zeigen, kann also äquivalent gezeigt werden, dass die letzte Wahrscheinlich in (38) gleich 0 ist. Insbesondere folgt dies direkt, wenn gezeigt werden kann, dass $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t}$ als Prozess unter \mathbb{Q} eine positive Drift aufweist. Dazu kann

$\ln\left(\frac{s_1(t)}{s_2(t)}\right)$ genauer betrachtet werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right) &= \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 t + \delta_2 t - \frac{\sigma_1^2}{2}t + \frac{\sigma_2^2}{2}t + \sigma_1 W_1^*(t) - \sigma_2 W_2^*(t) \\
 &= \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \delta_1 t + \delta_2 t - \frac{\sigma_1^2}{2}t + \frac{\sigma_2^2}{2}t + \sigma_1 W_1^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_2 W_2^{\mathbb{Q}}(t) \\
 &\quad - \sigma_1(-\theta_+ \sigma_1 - (1 - \theta_+) \sigma_2 \rho)t + \sigma_2(-\theta_+ \sigma_1 \rho - (1 - \theta_+) \sigma_2)t \\
 &= \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \sigma_1 W_1^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_2 W_2^{\mathbb{Q}}(t) + (\theta_+ \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2} - \delta_1 + \delta_2)t \\
 &= \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) + \sigma_1 W_1^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_2 W_2^{\mathbb{Q}}(t) + \sigma^2 \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}.
 \end{aligned}$$

Definiert man nun den Wiener-Prozess \tilde{W} durch $\tilde{W}(t) := \frac{\sigma_1 W_1^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_2 W_2^{\mathbb{Q}}(t)}{\sigma}$, so lässt sich $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t}$ auch als geometrische Brownsche Bewegung schreiben. Es gilt

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{s_1}{s_2} \exp\left(\sigma \tilde{W}(t) - \frac{\sigma^2}{2}t + \left(\frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}\right)t\right)$$

Nach der Voraussetzung ist der Ausdruck unter der Wurzel hier nicht negativ und $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t}$ besitzt damit eine positive Drift. Damit wird die Stoppzeit τ^* bezüglich \mathbb{Q} mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht, falls unterhalb von y^* gestartet wird. Es liegen also alle Startpunkte mit $\frac{s_1}{s_2} < y^*$ im Fortsetzungsbereich der Option. Nun bleibt noch zu zeigen, dass der oben definierte Preisprozess der Option ein Supermartingal auf dem Stoppgebiet ist. In diesem Bereich stimmt der Preisprozess mit der Auszahlungsfunktion $h(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)^+$ überein. Es soll $Ah < rh$ gezeigt werden für alle Punkte $\frac{s_1}{s_2} \geq y^*$, denn dann gilt für jede Stoppzeit τ

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}[e^{r(\tau \wedge \tau^*)} h(S_1(\tau \wedge \tau^*), S_2(\tau \wedge \tau^*))] \\
 &= h(s_1, s_2) + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau \wedge \tau^*} Ah(S_1(t), S_2(t)) - rh(S_1(t), S_2(t)) dt\right] \\
 &< h(s_1, s_2).
 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, ist durch keine Stoppstrategie in Erwartung eine Verbesserung der Ausgangssituation möglich und sofortiges Stoppen ist optimal. Da $y^* > 1$, kann die Auszahlungsfunktion auf dem Fortsetzungsbereich auch einfach geschrieben werden als $h(s_1, s_2) = s_1 - s_2$, und es folgt

$$Ah = s_1(r - \delta_1) - s_2(r - \delta_2) = rh + s_2\delta_2 - s_1\delta_1.$$

Für die Supermartingaleigenschaft kann also einfach auch $s_2\delta_2 - s_1\delta_1 \leq 0$ für $\frac{s_1}{s_2} \geq y^*$ gezeigt werden. Nach Definition von θ_+ gilt

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2\theta_+(1 - \theta_+) + \theta_+\delta_1 + (1 - \theta_+)\delta_2,$$

woraus sich direkt $(\theta_+ - 1)\delta_2 - \theta_+\delta_1 \leq 0$ folgern lässt. Multipliziert man beide Seiten der Ungleichung mit $\frac{s_2}{\theta_+ - 1}$, so ergibt sich daraus $s_2\delta_2 - s_2y^*\delta_1 \leq 0$. Wegen $\frac{s_1}{s_2} \geq y^*$ folgt daraus $s_2\delta_2 - s_1\delta_1 \leq 0$. Somit gilt $Ah < rh$ auf $[y^*, \infty)$ und die Stoppzeit $\tau^* := \inf\{t > 0 : \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \geq y^*\}$ optimal. \square

Bemerkung. *Mit Hilfe des Erzeugers A von $(S_1(t), S_2(t))_{0 \leq t}$ aus (23) lässt sich nun auch die Martingaleigenschaft des Preisprozesses $V(s_1, s_2)$ im Fortsetzungsbereich nachrechnen. Dazu ist zu zeigen, dass V in diesem Bereich eine r -harmonische Funktion ist, also $AV = rV$. Für $\frac{s_1}{s_2} < y^*$ gilt*

$$\begin{aligned} AV &= s_1(r - \delta_1)\partial_1 V + s_2(r - \delta_2)\partial_2 V + \frac{1}{2}\sigma_1 s_1 \partial_1^2 V + \frac{1}{2}\sigma_2 s_2 \partial_2^2 V + \rho\sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 \partial_{12}^2 V \\ &= s_1(r - \delta_1)(y^* - 1)(y^*)^{-\theta_+} \theta_+ s_1^{\theta_+ - 1} s_2^{1 - \theta_+} \\ &\quad + s_2(r - \delta_2)(y^* - 1)(y^*)^{-\theta_+} s_1^{\theta_+} (1 - \theta_+) s_2^{-\theta_+} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_1^2 s_1^2 (y^* - 1)(y^*)^{-\theta_+} \theta_+ (\theta_+ - 1) s_1^{\theta_+ - 2} s_2^{1 - \theta_+} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_2^2 s_2^2 (y^* - 1)(y^*)^{-\theta_+} s_1^{\theta_+} (1 - \theta_+) (-\theta_+) s_2^{-\theta_+ - 1} \\ &\quad + \rho\sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 (y^* - 1)(y^*)^{-\theta_+} \theta_+ s_1^{\theta_+ - 1} (1 - \theta_+) s_2^{-\theta_+} \\ &= \theta_+(r - \delta_1)V + (1 - \theta_+)(r - \delta_2)V - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \theta_+ (1 - \theta_+)V - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \theta_+ (1 - \theta_+)V \\ &\quad + \rho\sigma_1\sigma_2 \theta_+ (1 - \theta_+)V \\ &= rV. \end{aligned} \tag{39}$$

Die letzte Gleichheit folgt, da θ_+ Nullstelle der Gleichung (26) ist.

Die Abbildung 2 soll das Ergebnis des letzten Satzes noch einmal veranschaulichen. Der linke Teil der Grafik zeigt dabei die Gerade $\frac{s_1}{s_2} = y^*$, welche Stopp- und Fortsetzungsbereich voneinander trennt. Die Gerade selber gehört dabei zum Stoppgebiet. Für Startpunkte mit $\frac{s_1}{s_2} < y^*$ bildet diese Gerade also die Grenze zum optimalen Stoppen. Im rechten Teil der Abbildung wird erneut für ein festes s_2 der Wert der Option in Abhängigkeit von $\frac{s_1}{s_2}$ skizziert. Die Grenze zwischen Stopp- und Fortsetzungsbereich ist hier ebenfalls durch y^* markiert und gut zu erkennen. Außerdem soll an dieser Stelle noch einmal genauer auf das Martingal M^- eingegangen werden, welches sich in 2.2 ebenfalls als möglicher Kandidat für eine Zerlegung herausgestellt hatte. Auch mit Hilfe

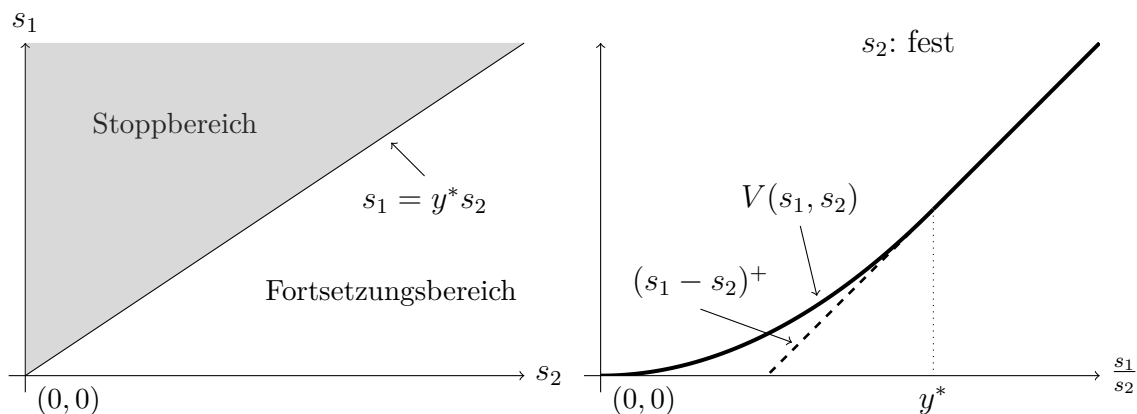


Abbildung 2: Das Stoppgebiet und die Wertfunktion im Fall positiver Dividenden

dieses Martingals ist eine Darstellung des Prozesses Z durch $Z_t = g_-(Y_t)M_t^-$ möglich. Dabei ist $Y_t := \left(\frac{s_1(t)}{s_2(t)}\right)_{0 \leq t}$ wie in der ersten Darstellung und g_- beschreibt analog dazu die Funktion $g_-(y) = y^{-\theta_-}(y-1)^+ \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_-} s_2$. Da $\theta_- < 0$, also insbesondere auch kleiner als 1 ist, hat die Funktion g_- jedoch kein eindeutiges Maximum und liefert daher keine neuen Ergebnisse in diesem Fall. Vergleicht man den Fall positiver Dividenden mit dem in 2.3.1 behandelten Fall, so lässt sich bereits erkennen, dass Abweichungen in den Dividendenzahlungen einen großen Einfluss auf den Optionspreis haben können. Die beiden bisher behandelten Fälle decken bereits einen Teil der möglichen Situationen von Dividendenzahlungen ab. Im folgenden Abschnitt soll eine für die Optionsbewertung sinnvolle Einteilung der gesamten (δ_1, δ_2) -Ebene stattfinden.

2.3.3 Ausweitung der Dividenden auf weitere Fälle

Bisher wurde auf zwei Fälle von Dividendenzahlungen eingegangen. Neben rein positiven Dividendenzahlungen wurde bereits ein erweiterter Fall der dividendenfreien Situation betrachtet. Ziel wird es sein, die Option für jede mögliche Dividendenkombination $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$ zu bewerten. Dafür soll im Folgenden die (δ_1, δ_2) -Fläche in sechs Fälle geteilt werden. Die Einteilung stammt dabei aus Abschnitt 3 von [15], wobei der dort auftretende erste Fall hier in die beiden Fälle (A0) und (A1) unterteilt wurde. Der Grund für diese zusätzliche Unterteilung wird an späterer Stelle ersichtlich. Bei der Zerlegung des Prozesses Z mit der Methode von Beibel/Lerche als $Z_t = g(Y_t)M_t^+$ bzw. $Z_t = g_-(Y_t)M_t^-$ fällt auf, dass es von den Werten von θ_+ und θ_- abhängt, ob die entsprechende Funktion g bzw. g_- ein eindeutiges Maximum besitzt oder nicht. Genauer gesagt, ist dabei entscheidend, ob das jeweilige θ größer oder kleiner ist als 1. Dadurch erhält man eine Aufteilung in sechs verschiedene Fälle bezüglich der Werte von θ_{\pm} . Die folgende Unterteilung wird sich dabei als sinnvoll herausstellen:

(A0) $\theta_+ = 1$ und $\theta_- = 1$,

(A1) $\theta_+ = 1$ und $\theta_- < 1$,

(A2) $\theta_+ > 1$ und $\theta_- \leq 1$,

(A3) $\theta_+ > 1$ und $\theta_- > 1$,

(A4) θ_+ und θ_- sind komplex,

(A5) $\theta_+ < 1$ und $\theta_- < 1$.

Untersucht man diese sechs Fälle genauer, so stellt sich heraus, dass sie bereits alle Möglichkeiten von Dividendenzahlungen, die betrachtet werden sollen, abdecken. Genauer lassen sich die sechs zu betrachtenden Fälle äquivalent als disjunkte Mengen darstellen, welche die gesamte (δ_1, δ_2) -Fläche abdecken. Dies ist durch Einsetzen der ursprünglichen Definitionen von θ_{\pm} als

$$\theta_{\pm} := \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}$$

und durch Umformung der oben gestellten Bedingung zu sehen. Man erhält dadurch die Einteilung

$$(A0) \Leftrightarrow D0 = \left\{ \delta_1 = 0, \delta_2 = -\frac{\sigma^2}{2} \right\},$$

$$(A1) \Leftrightarrow D1 = \left\{ \delta_1 = 0, \delta_2 > -\frac{\sigma^2}{2} \right\},$$

$$(A2) \Leftrightarrow D2 = \{ \delta_1 \geq 0 \} - D0 - D1,$$

$$(A3) \Leftrightarrow D3 = \left\{ \delta_2 < -\frac{\sigma^2}{2}, \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2} \leq \delta_1 < 0 \right\},$$

$$(A4) \Leftrightarrow D4 = \left\{ \delta_2 < 0, \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} - \sqrt{-2\delta_2\sigma^2} < \delta_1 < \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2} \right\},$$

$$(A5) \Leftrightarrow D5 = \left\{ \delta_1 < 0, \delta_2 \geq \delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_1\sigma^2} \right\} = \mathbb{R}^2 - D0 \cup D1 \cup D2 \cup D3 \cup D4.$$

Somit wird nun auch ersichtlich, warum der dividendenfreie Fall bereits in der erweiterten Version behandelt wurde. Die Bewertung von (A1) ist damit abgeschlossen. An dieser Stelle sieht man nun auch, weshalb die Bewertung für diesen Fall nicht mit der Methode von Beibel/Lerche durchgeführt wurde. Da $\theta_+ = 1$ gilt, besitzt die resultierende Funktion $g(y) = (y - 1)^+ y^{-1} s_1$ kein eindeutiges Maximum. Gleiches gilt für $g_-(y) = y^{-\theta_-} (y - 1)^+ \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^{\theta_-} s_2$, da $\theta_- < 1$. Dadurch ist der erarbeitete Ansatz ungeeignet. Die bereits behandelten Fälle der positiven Dividendenzahlungen liegen allesamt in (A2). Als nächstes soll gezeigt werden, dass sich die Ergebnisse aus dem Fall der

positiven Dividendenzahlungen auch auf den gesamten Bereich (A2) ausweiten lassen. Intuitiv sollte auch für die hinzukommenden Fälle mit $\delta_2 \geq 0$ eine Schwelle des Verhältnisses der Aktienpreise zueinander existieren, bei der die Ausübung der Option zu einer optimalen erwarteten Auszahlung führt. Dies hängt damit zusammen, dass der Preisprozess der ersten Aktie ein \mathbb{P}^* -Supermartingal und der Preisprozess der zweiten Aktie ein \mathbb{P}^* -Submartingal ist. Der Wert der Option wird also bei laufender Zeit von beiden Aktien im Erwartungswert gesenkt. Es soll im Folgenden aber noch konkret nachgerechnet werden, dass für $\theta_+ > 1$ und $\theta_- \leq 1$ der Wert der Exchange-Option gegeben ist durch

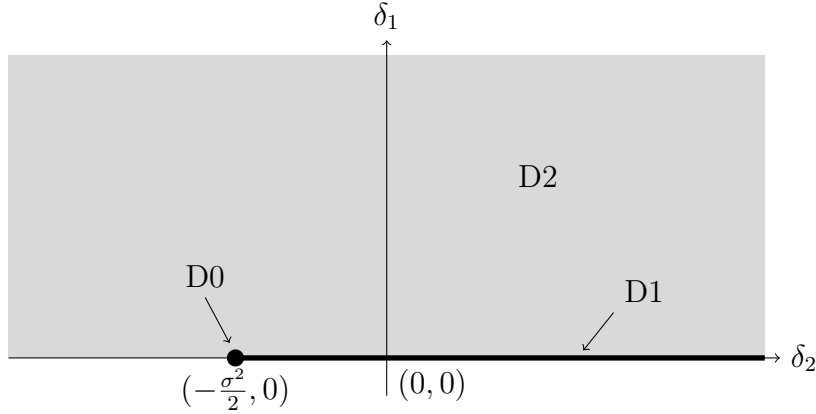
$$V(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{y^*-1}{(y^*)^{\theta_+}} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} < y^*, \\ s_1 - s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} \geq y^* \end{cases}$$

mit $y^* = \frac{\theta_+}{\theta_+-1}$. Dazu soll kurz begründet werden, warum die wesentlichen Schritte im Beweis von Satz 2.3.2 auch in diesem allgemeineren Fall gültig sind. Es wird wieder die Stoppzeit $\tau^* = \{t > 0 \mid \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \geq y^*\}$ betrachtet. Mit derselben Zerlegung wie zuvor, erhält man dann

$$\mathbb{E}^*[Z_{\tau^*} \mathbb{1}_{\{\tau^* < \infty\}}] = \mathbb{E}^*[g(Y_{\tau^*}) M_{\tau^*}^+ \mathbb{1}_{\{\tau^* < \infty\}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(Y_{\tau^*}) \mathbb{1}_{\{\tau^* < \infty\}}].$$

Da $\theta_+ > 1$ vorausgesetzt ist, hat die Funktion g ein eindeutiges Maximum in y^* . Zum Abschluss muss dann nur noch gezeigt werden, dass dieses Maximum auch mit Sicherheit erreicht wird, d. h., dass $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$ gilt. Mit analogen Überlegungen wie im Fall positiver Dividenden, erhält man hier ebenfalls

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}(\tau^* < \infty) \\ &= 1 - \mathbb{Q}(\tau^* = \infty) \\ &= 1 - \mathbb{Q}\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)} < \frac{\theta_+}{\theta_+-1} \text{ für alle } t \geq 0\right) \\ &= 1 - \mathbb{Q}\left(\tilde{W}(t) < \frac{\ln\left(\frac{s_2\theta_+}{s_1(\theta_+-1)}\right) - \sigma^2 t \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}}}{\sigma} \text{ für alle } t \geq 0\right) \\ &= 1 - \mathbb{Q}\left(\tilde{W}(t) + \sigma t \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}} < \frac{\ln\left(\frac{s_2\theta_+}{s_1(\theta_+-1)}\right)}{\sigma} \text{ für alle } t \geq 0\right) \quad (40) \\ &= 1. \end{aligned}$$


 Abbildung 3: Darstellung der Bereiche $D0$, $D1$ und $D2$ auf der (δ_1, δ_2) -Ebene

Dabei ist \tilde{W} wieder definiert als $\tilde{W}(t) = \frac{1}{\sigma}(\sigma_1 W_1^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_2 W_2^{\mathbb{Q}}(t))$ und somit ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{Q} . Die letzte Wahrscheinlichkeit in (40) verschwindet, da gefordert wird, dass ein Wiener-Prozess mit positiver Drift, eine positive, gegen Null strebende Schwelle nicht überschreitet. Diese Schwelle wird jedoch mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht. Das heißt, es folgt $\mathbb{Q}(\tau^* < \infty) = 1$. Stoppbereich und Fortsetzungsbereich lassen sich ebenfalls völlig analog zum Fall mit positiven Dividenden zuordnen. Daher gilt Satz 2.3.2 ebenfalls für den gesamten Bereich (A2). Grafisch lassen sich Stopp- und Fortsetzungsbereich und die Wertfunktion der Option ebenfalls wie in Abbildung 2 darstellen. In den folgenden Abschnitten sollen noch die verbleibenden vier Fälle (A0), (A3), (A4) und (A5) behandelt werden. Die Abbildung 3 veranschaulicht die Lage der drei Bereiche $D0$, $D1$ und $D2$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene. Dabei ist der Bereich $D2$ grau eingefärbt.

2.3.4 Fall (A0)

Hier soll die Exchange-Option für den Fall (A0) bewertet werden. Dieser Fall besteht nur aus einem einzigen Punkt $(0, -\frac{\sigma^2}{2})$ der (δ_1, δ_2) -Ebene. Zunächst soll kurz erläutert werden, warum dieser Fall gesondert behandelt wird. Der Grund dafür ist, dass die Bewertung für (A0) nicht analog zu einer der beiden Strategien erfolgen kann, mit denen die Bereiche (A1) bzw. (A2) bewertet wurden. Anders ausgedrückt, lässt er sich keinem der beiden anderen Fälle zuordnen, in denen die Dividende der ersten Aktie nicht-negativ ist. In dem Beweis von Satz 2.3.1 sieht man für den Fall $\delta_1 = 0$, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-rn} (S_1(n) - S_2(n))^+] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[s_1 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (\delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right) - s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2})n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Gilt nun zudem $\delta_2 = -\frac{\sigma^2}{2}$, so lässt sich dies weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-rn} (S_1(n) - S_2(n))^+] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_1 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (\delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})n}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_1 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right)}{\sqrt{\sigma^2 n}} \right) = \frac{s_1}{2}. \end{aligned}$$

Dadurch wird deutlich, dass beliebig langes Warten ein anderes Ergebnis liefert als im Fall (A1). Dieser Ansatz scheitert also für (A0). Auch die Methode von Beibel/Lerche, die für (A2) angewandt wurde, bringt in diesem Fall keine Lösung. Für (A0) gilt $\theta_{\pm} = 1$, d. h.,

$$(M_t)_{t \geq 0} := (M_t^{\pm})_{t \geq 0} = \left(\frac{e^{-rt} S_1(t)}{s_1} \right)_{t \geq 0}$$

ist das einzige Martingal, dass man aus dem Ansatz in (A2) erhält. Setzt man analog wieder $Y_t = \frac{S_1(t)}{S_2(t)}$, so ergibt sich als mögliche Zerlegung $e^{-rt} (S_1(t) - S_2(t))^+ = M_t g(Y_t)$ mit $g(y) = s_1 (1 - y^{-1})^+$. Die Funktion g besitzt jedoch nicht das geforderte eindeutige Maximum, weshalb die Methode hier ebenfalls scheitert. Über einen neuen Ansatz soll gezeigt werden, dass der Preis der Option im Dividendenfall (A0) mit dem Anfangspreis der ersten Aktie übereinstimmt, d. h., man erhält trotz eines anderen Ansatzes dasselbe Ergebnis wie im Fall (A1). Die Aussage des folgenden Satzes ist ähnlich zur Aussage des Satzes 2.3.1. Für den Beweis wird jedoch eine andere Folge von Stoppzeiten benötigt. Die Idee für diese spezielle Folge von Stoppzeiten stammt dabei wieder aus [15].

Satz 2.3.3. *Gilt $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 = -\frac{\sigma^2}{2}$, so ist der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option gegeben durch*

$$V(s_1, s_2) = s_1.$$

Weiter existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{(n)} = \infty$ fast sicher, sodass

$$V(s_1, s_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau^{(n)}} (S_1(\tau^{(n)}) - S_2(\tau^{(n)}))^+ \mathbb{1}_{\{\tau^{(n)} < \infty\}}] = s_1.$$

Das folgende Lemma soll im Beweis des Satzes helfen. Teil (i) des Lemmas und sein Beweis stammen dabei aus Kapitel 11 von [9]. Der zweite Teil bildet einen Spezialfall von Lemma 1 aus [15].

Lemma 2.3.4. *Sei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche-Bewegung bezüglich des*

Maßes \mathbb{Q} mit $W_0 = 0$. Weiter seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Die Stoppzeit τ_b^μ sei definiert durch $\tau_b^\mu := \inf\{t > 0 : W_t - \mu t \geq b\}$, d. h., τ_b^μ ist der erste Zeitpunkt, in dem der Wiener-Prozess mit Drift $W_t - \mu t$ die Schranke b überschreitet. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

(i)

$$\mathbb{Q}(\tau_b^\mu \leq t) = \int_0^t \frac{b}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{(b - \mu s)^2}{2s}\right) ds.$$

(ii) Für den Punkt $\mu^2 - 2\lambda = 0$ ist der Wert der Laplace-Transformierten der Stoppzeit τ_b^μ gegeben durch

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{\lambda \tau_b^\mu} \mathbf{1}_{\{\tau_b^\mu < \infty\}}] = e^{\mu b}.$$

Beweis: (i) : Sei $\tau_b := \inf\{t \geq 0 : W_t \geq b\}$ definiert als die Ersterreichenszeit der Schranke $b > 0$ für eine Brownsche Bewegung ohne Drift. Dann ist die Dichtefunktion von τ_b bekannt als

$$f_b(t) := \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right).$$

Mit Hilfe des Satzes von Girsanov lässt sich ein neues Maß \mathbb{Q}^μ definieren durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^\mu}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} := \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}t + \mu W_t\right) =: Z_t \quad \text{für } t \geq 0.$$

Der Prozess $\bar{W}_t := W_t - \mu t$ ist ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{Q}^μ . Bezeichne mit $\mathbb{E}_\mu[\cdot]$ den Erwartungswert bezüglich \mathbb{Q}^μ . Durch den Übergang zu \mathbb{Q}^μ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau_b^\mu \leq t) &= \mathbb{Q}^\mu(\tau_b \leq t) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau_b \leq t\}} Z_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau_b \leq t\}} Z_t | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_b}]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau_b \leq t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_t | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_b}]], \text{ da } \{\tau_b \leq t\} \in \mathcal{F}_{t \wedge \tau_b} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau_b \leq t\}} Z_{t \wedge \tau_b}], \text{ nach Optional-Sampling-Theorem} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau_b \leq t\}} Z_{\tau_b}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{\tau_b \leq t\}} e^{\mu W_{\tau_b} - \frac{\mu^2}{2} \tau_b}] \\ &= \int_0^t e^{\mu b - \frac{\mu^2}{2} s} \frac{b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{b^2}{2s}} ds \\ &= \int_0^t \frac{b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(b - \mu s)^2}{2s}} ds. \end{aligned}$$

(ii) Sei $\mu^2 - 2\lambda = 0$. Nach (i) hat τ_b^μ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_b^\mu(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(b - \mu t)^2}{2t}\right).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{\lambda\tau_b^\mu} \mathbf{1}_{\{\tau_b^\mu < \infty\}}] &= \int_0^\infty e^{\lambda t} \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(b - \mu t)^2}{2t}\right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}} e^{\mu b} e^{-2(\mu^2 - 2\lambda)t} dt \\ &= e^{\mu b} \int_0^\infty f_b(t) dt \\ &= e^{\mu b} \end{aligned}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_b(t)$ wie im Beweis von (i). □

Beweis (von Satz 2.3.3): Auch hier ist wieder der Ausdruck

$V(s_1, s_2) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^*[e^{-r\tau}(S_1(\tau) - S_2(\tau))^+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$ zu berechnen. Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Satz 2.3.1 folgt auch hier wieder $V(s_1, s_2) \leq s_1$, da $\delta_1 = 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass der Wert der Option nicht echt kleiner ist als s_1 . Dazu wird eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$\tau_n := \inf \left\{ t \geq 0 : \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \geq n \right\}.$$

Im Folgenden soll ein $n > \frac{s_1}{s_2}$ festgehalten werden. Ziel ist es für dieses n den Ausdruck $\mathbb{E}^*[e^{-r\tau_n}(S_1(\tau_n) - S_2(\tau_n))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}]$ genauer zu bestimmen. Sei an dieser Stelle mit Hilfe von Girsanov das Maß \mathbb{P}_2^* erneut definiert durch

$$\frac{d\mathbb{P}_2^*}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} := e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}t + \sigma_2 W_2^*(t)} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Für den Quotienten der Aktienpreise gilt

$$\begin{aligned} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} &= \frac{s_1 e^{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})t + \sigma_1 W_1^*(t)}}{s_2 e^{(r + \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2})t + \sigma_2 W_2^*(t)}} \\ &= \frac{s_1}{s_2} e^{(-\frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2})t + \sigma_1 W_1^*(t) - \sigma_2 W_2^*(t)} \\ &= \frac{s_1}{s_2} e^{-\sigma_2^2 t + \sigma_1 W_{12}^*(t) - \sigma_2 W_{22}^*(t)} \\ &= \frac{s_1}{s_2} e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}t - \frac{\sigma_2^2}{2}t + \sigma \tilde{W}(t)}. \end{aligned}$$

Dabei ist der Prozess $(\tilde{W}(t))_{t \geq 0}$ definiert durch

$$\tilde{W}(t) := \frac{\sigma_1 W_{12}^*(t) - \sigma_2 W_{22}^*(t)}{\sigma}.$$

\tilde{W} ist in diesem Fall ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{P}_2^* , da $\sigma^2 t$ genau die Varianz von $\sigma_1 W_{12}^*(t) - \sigma_2 W_{22}^*(t)$ ist. Dadurch lässt sich der Quotient $\frac{S_1(t)}{S_2(t)}$ als eindimensionale geometrische Brownsche Bewegung mit negativer Drift bezüglich des Maßes \mathbb{P}_2^* schreiben. Da der geometrische Wiener-Prozess stetige Pfade hat und $n \geq \frac{s_1}{s_2}$, lässt sich auch die Stoppzeit τ_n umschreiben zu

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \frac{s_1}{s_2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma \tilde{W}(t)} = n \right\} = \inf \left\{ t \geq 0 : -\sigma t + \sigma \tilde{W}(t) = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{s_2 n}{s_1} \right) \right\}.$$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass, wegen der negativen Drift, $\mathbb{P}_2^*(\tau_n < \infty) < 1$ gilt. Für den erwarteten Ertrag bei Anwenden der Stoppstrategie τ_n gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[e^{-r\tau_n}(S_1(\tau_n) - S_2(\tau_n))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}] &= \mathbb{E}^*[e^{-r\tau_n} S_2(\tau_n) \left(\frac{S_1(\tau_n)}{S_2(\tau_n)} - 1 \right)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}] \\ &= s_2 \mathbb{E}_2^*[e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau_n} \left(\frac{S_1(\tau_n)}{S_2(\tau_n)} - 1 \right)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}] \\ &= s_2(n-1) \mathbb{E}_2^*[e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau_n} \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}] \\ &= s_2(n-1) \frac{s_1}{s_2 n} \\ &= s_1 - \frac{s_1}{n}. \end{aligned} \tag{41}$$

Im vorletzten Schritt wurde hier Lemma 2.3.3 (ii) mit $\mu = -\sigma$, $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$ und $b = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{s_2 n}{s_1} \right)$ zur Berechnung der Laplace-Transformierten angewandt. Mit (41) folgt dann für den Preis der Exchange-Option im Fall (A0)

$$\begin{aligned} V(s_1, s_2) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^*[e^{-r\tau_n}(S_1(\tau_n) - S_2(\tau_n))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_1 - \frac{s_1}{n} \\ &= s_1. \end{aligned}$$

□

2.3.5 Fall (A3)

Sei in diesem Abschnitt $\theta_+ > 1$ und $\theta_- > 1$ vorausgesetzt oder äquivalent $\delta_2 < -\frac{\sigma^2}{2}$ und $\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2} \leq \delta_1 < 0$. Intuitiv ist es, speziell in diesem Fall, schwer zuvor eine Vorstellung des arbitragefreien Preises für die Option zu entwickeln. Einerseits

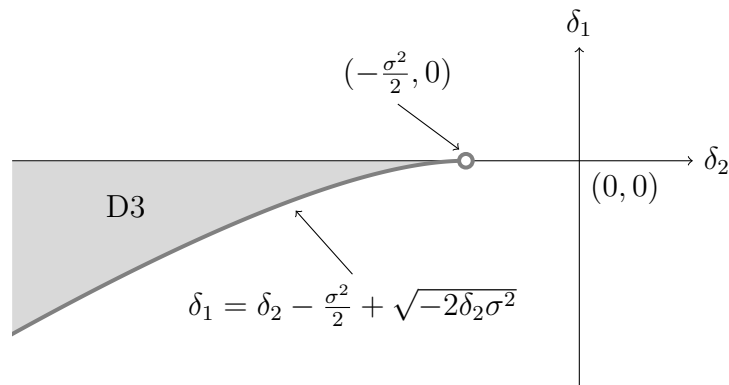


Abbildung 4: Darstellung von $D3$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene

ist der diskontierte Preisprozess der ersten Aktie durch die negativen Dividenden ein Submartingal und treibt somit den Preis durch langes Warten in beliebige Höhen. Andererseits ist der diskontierte Preisprozess der zweiten Aktie ebenfalls ein Submartingal, welches die Auszahlung der Option im Laufe der Zeit verringert. Für den Fall A3 wird sich jedoch zeigen, dass die Dividendenzahlungen der zweiten Aktie weit genug im negativen Bereich liegen, um für einen endlichen arbitragefreien Preis zu sorgen. Mit anderen Worten senkt der steigende Preis der zweiten Aktie die Auszahlung der Option schneller als die erste Aktie die Auszahlung anhebt. Daraus ergibt sich ein sehr interessantes Resultat für die Form der Stopp- und Fortsetzungsbereiche. Abbildung 4 soll noch einmal den Bereich $D3$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene veranschaulichen. Dabei ist zu beachten, dass die δ_2 -Achse nicht zum Bereich $D3$ gehört. Der eingezeichnete Teil der Funktion $\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2} = \delta_1$ bildet aber den unteren Rand des Bereiches.

Das Resultat der Optionsbewertung in diesem Fall ist ebenfalls in Abschnitt 3 von [15] zu sehen. Im Gegensatz zu dieser Quelle, soll hier jedoch die Bewertung mit Hilfe der Methode von Beibel/Lerche stattfinden. Dazu seien die Martingale M^+ und M^- erneut definiert durch $(M_t^\pm)_{t \geq 0} := (e^{-rt} e^{\theta_\pm X_1(t)} e^{(1-\theta_\pm)X_2(t)})_{t \geq 0}$ und $Y_t := \frac{S_1(t)}{S_2(t)}$. Als nächstes definiere die beiden Funktionen g_+ und g_- durch $g_\pm(y) := y^{-\theta_\pm} (y-1)^+ \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\theta_\pm} S_2$. Auch hier erhält man durch diese Definitionen wieder eine Darstellung des Prozesses Z als $Z_t = g_+(Y_t)M_t^+$. Da $\theta_+ > 1$, besitzt die Funktion g_+ ein eindeutiges Maximum in $y_+ = \frac{\theta_+}{\theta_+-1}$. Neben dieser ersten Darstellung erhält man in diesem Fall aber noch eine weitere Zerlegung als $Z_t = g_-(Y_t)M_t^-$. Die Funktion g_- besitzt ebenfalls ein eindeutiges Maximum, da $\theta_- > 1$. Dieses befindet sich in einem Punkt $y_- := \frac{\theta_-}{\theta_- - 1}$. Somit erhält man eine weitere mögliche Form der Zerlegung durch $Z_t = g_-(Y_t)M_t^-$ mit der Methode von Beibel/Lerche. Durch diese zweite potenzielle Zerlegung ergibt sich später noch eine weitere kritische Schwelle, bei der es optimal ist, diese Option auszuüben. Dadurch erhält dann auch der Stoppbereich eine besondere Form. Konkreter soll die Bewertung der Option für den Fall A3 durch folgenden Satz belegt werden:

Satz 2.3.5. Sei $\theta_+, \theta_- > 1$ und seien y_+ und y_- gegeben durch $y_{\pm} = \frac{\theta_{\pm}}{\theta_{\pm}-1}$. Dann ist der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option gegeben durch

$$V(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{y_+-1}{y_+^{(\theta_+)}} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} s_2, & \text{für } \frac{s_1}{s_2} < y_+, \\ s_1 - s_2, & \text{für } y_+ \leq \frac{s_1}{s_2} \leq y_-, \\ \frac{y_- - 1}{y_-^{(\theta_-)}} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_-} s_2, & \text{für } y_- < \frac{s_1}{s_2}. \end{cases} \quad (42)$$

Außerdem ist die Stoppzeit $\tau^* := \inf\{t > 0 \mid \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \in [y_+, y_-]\}$ eine optimale Ausübungsstrategie der Option.

Da nach Definition $1 < \theta_- \leq \theta_+$, gilt andererseits $1 < y_+ \leq y_-$. Der Stoppbereich der Option hat hier also die Form eines Kegels mit der Spitze im Ursprung. Falls $y_+ = y_-$, so besteht der Stoppbereich hier sogar nur aus einer einzelnen Geraden.

Beweis: Bezeichne mit \mathbb{Q}^+ bzw. \mathbb{Q}^- die beiden Maße, welche sich durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^{\pm}}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} := M_t^{\pm}$$

auf \mathcal{F}_t definieren lassen. Weiter sei $\mathbb{E}^{\pm}[\cdot]$ der Erwartungswert unter \mathbb{Q}^{\pm} . Die Beweisstrategie ist nun ähnlich zu der im Beweis von Satz 2.3.2. Zuerst soll gezeigt werden, dass für jeden Startpunkt (s_1, s_2) mit $\frac{s_1}{s_2} < y_+$ $\mathbb{Q}^+(\tau^* < \infty) = 1$ gilt, und dass für jeden Startpunkt (s_1, s_2) mit $\frac{s_1}{s_2} > y_-$ analog $\mathbb{Q}^-(\tau^* < \infty) = 1$ erfüllt ist. Mit anderen Worten ist dann für jeden Punkt außerhalb des Stoppbereichs die Methode von Beibel/Lerche anwendbar. Die Menge $\{(s_1, s_2) : \frac{s_1}{s_2} \in (-\infty, y_+) \cup (y_-, \infty)\}$ gehört damit zum Fortsetzungsbereich der Option. Im Anschluss daran kann analog zum Fall (A2) gezeigt werden, dass die oben definierte Wertfunktion wie gewünscht ein Martingal auf dem Fortsetzungsbereich ist. Mit Hilfe des Erzeugers soll dann wiederum bewiesen werden, dass das übrige Intervall $[y_+, y_-]$ genau dem Stoppbereich der Option entspricht. Damit folgt dann auch die Behauptung des Satzes. Die Eigenschaft $\mathbb{Q}^+(\tau^* < \infty) = 1$ lässt sich hier durch dieselben Umformungen wie in (40) zeigen. Dadurch erhält man wieder

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}^+(\tau^* < \infty) \\ &= 1 - \mathbb{Q}^+ \left(\tilde{W}^+(t) + \sigma^2 t \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}} < \frac{\ln\left(\frac{S_2 \theta_+}{S_1 (\theta_+ - 1)}\right)}{\sigma} \text{ für alle } t \geq 0 \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Dabei ist \tilde{W}^+ definiert durch $\tilde{W}^+(t) := \frac{1}{\sigma}(\sigma_1 W_1^+(t) - \sigma_2 W_2^+(t))$ mit $W_1^+(t) := W_1^*(t) -$

$\theta_+ \sigma_1 t - (1 - \theta_+) \sigma_2 \rho t$ und $W_2^+(t) := W_1^*(t) - \theta_+ \sigma_1 \rho t - (1 - \theta_+) \sigma_2 t$. Damit ist $\tilde{W}^+(t)$ ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{Q}^+ . Die letzte Wahrscheinlichkeit in (43) verschwindet, da auf der linken Seite der Ungleichung ein Wiener-Prozess mit Drift steht, der eine gegen Null strebende Grenze nicht überschreiten soll. Da nach Voraussetzung θ_+ reell ist, wird garantiert, dass die Drift des Prozesses ebenfalls reell und damit insbesondere nichtnegativ ist. Deshalb wird die Grenze mit Wahrscheinlichkeit 1 überschritten. Völlig analog dazu kann auch $\mathbb{Q}^-(\tau^* < \infty) = 1$ gezeigt werden. Dazu sei der Startpunkt der Option in diesem Fall in einem Punkt mit $\frac{s_1}{s_2} > y_-$. Ersetzt man in allen Definitionen den Index $+$ einfach durch ein $-$, so ergibt sich bei gleicher Vorgehensweise

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}^-(\tau^* < \infty) \\ &= 1 - \mathbb{Q}^- \left(\tilde{W}^-(t) - \sigma^2 t \sqrt{\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}} > \frac{\ln \left(\frac{s_2 \theta_-}{s_1 (\theta_- - 1)} \right)}{\sigma} \text{ für alle } t \geq 0 \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Hier ist anzumerken, dass aufgrund der Startvoraussetzung der Ausdruck im Logarithmus in (44) kleiner als eins ist und sich so die Grenze von unten gegen Null bewegt. Da der Wiener-Prozess auf der linken Seite der Ungleichung eine nicht positive Drift hat, wird diese Grenze mit Wahrscheinlichkeit 1 überschritten und es folgt $\mathbb{Q}^-(\tau^* < \infty) = 1$. Insgesamt wird also garantiert, dass bezüglich der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaße der Wert y_+ bzw. y_- vom Prozess $(Y_t)_{0 \leq t}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlicher Zeit erreicht wird. Dadurch lässt sich also die Methode von Beibel/Lerche anwenden. Dass der oben definierte Preisprozess außerhalb des Intervalls $[y_+, y_-]$ ein Martingal beschreibt, lässt sich völlig analog zum Fall (A2) einsehen. Mit einer zu (39) identischen Rechnung folgt für $\frac{s_1}{s_2} < y_+$ und $\frac{s_1}{s_2} > y_-$, dass der Preisprozess V die Differentialgleichung $AV = rV$ erfüllt. Um zu zeigen, dass V ein Supermartingal auf dem Stoppbereich $[y_+, y_-]$ ist, soll ebenfalls wie in Fall (A2) gezeigt werden, dass die Ungleichung $Ah < rh$ für alle Startpunkte $\frac{s_1}{s_2} \in [y_+, y_-]$ gilt. Im Fall (A2) ist zu sehen, dass äquivalenterweise auch $s_2 \delta_2 - s_1 \delta_1 \leq 0$ für alle $\frac{s_1}{s_2} \in [y_+, y_-]$ gezeigt werden kann. Dadurch ist dann gezeigt, dass durch keine Stoppstrategie in Erwartung eine Verbesserung der Ausgangslage zu erreichen ist. Hier bezeichnet $h := h(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)^+$ wieder die Auszahlungsfunktion der Option. Begonnen wird dazu wieder mit der Gleichung

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha (1 - \alpha) + \alpha \delta_1 + (1 - \alpha) \delta_2.$$

Fasst man die linke Seite der Gleichung als Funktion in α auf, so ist dies eine nach unten

geöffnete Parabel mit den beiden Nullstellen θ_- und θ_+ . Daher gilt die Abschätzung

$$0 \leq \frac{1}{2}\sigma^2\theta(1-\theta) + \theta\delta_1 + (1-\theta)\delta_2 \text{ für alle } \theta \in [\theta_-, \theta_+].$$

Da $1 < \theta$ für $\theta \in [\theta_-, \theta_+]$, folgt daraus weiter

$$0 \leq \theta\delta_1 + (1-\theta)\delta_2 \text{ für alle } \theta \in [\theta_-, \theta_+].$$

Über einfache Äquivalenzumformungen ergibt sich daraus

$$0 \geq s_2\delta_2 - s_2\frac{\theta}{\theta-1}\delta_1 \text{ für alle } \theta \in [\theta_-, \theta_+].$$

Da die Funktion $\frac{x}{x-1}$ für $x > 1$ stetig und monoton fallend ist, existiert für jeden Startpunkt $y_+ = \frac{\theta_+}{\theta_+-1} \leq \frac{s_1}{s_2} \leq \frac{\theta_-}{\theta_- - 1}$ ein $\theta \in [\theta_-, \theta_+]$ mit $\frac{\theta}{\theta-1} = \frac{s_1}{s_2}$. Mit Hilfe obiger Ungleichung erhält man dann

$$0 \geq s_2\delta_2 - s_1\delta_1 \text{ für alle Startpunkte mit } y_+ \leq \frac{s_1}{s_2} \leq y_-.$$

Also ist $V(s_1, s_2)$ ein Supermartingal auf $[y_+, y_-]$. Damit ist gezeigt, dass τ^* eine optimale Stoppzeit der Option ist. \square

In Abbildung 5 sind die Wertfunktion und das Stoppgebiet der Option für diesen Fall grafisch dargestellt. Der linke Teil zeigt das kegelförmige Stoppgebiet mit den beiden Geraden $\frac{s_1}{s_2} = y_{\pm}$. Diese Geraden bilden auch hier eine Grenze zum optimalen Stoppen, falls die Option im Fortsetzungsbereich startet. Der rechte Teil der Abbildung zeigt die Wertfunktion und die Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit von $\frac{s_1}{s_2}$. Hier wird noch einmal veranschaulicht, dass im Intervall $[y_+, y_-]$ beide Funktionen übereinstimmen. Außerhalb des Intervalls gilt jedoch $V(s_1, s_2) > (s_1 - s_2)^+$. Die Abbildung 6 zeigt den Spezialfall, in dem $y_+ = y_-$ bzw. $\theta_+ = \theta_-$ gilt. Dieser Fall entspricht genau den Punkten mit der Eigenschaft $\delta_1 = \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2}$ aus dem Bereich (A3). Diese Punkte bilden die untere Grenze des Bereichs (A3), was in Abbildung 4 gut zu erkennen ist. Hier besteht der Stoppbereich tatsächlich nur aus einer einzelnen Gerade, welche die Grenze zum optimalen Stoppen bildet. Der Fortsetzungsbereich nimmt den restlichen Teil der (s_1, s_2) -Ebene ein. Die linke Grafik zeigt ebenfalls, dass die Wertfunktion die Auszahlungsfunktion nur in einem einzigen Punkt berührt.

2.3.6 Fall (A4)

Seien in diesem Abschnitt θ_+ und θ_- als komplex vorausgesetzt. Anders ausgedrückt ist diese Vorderung äquivalent dazu, dass $(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2} < 0$ gilt. Für die Dividenden

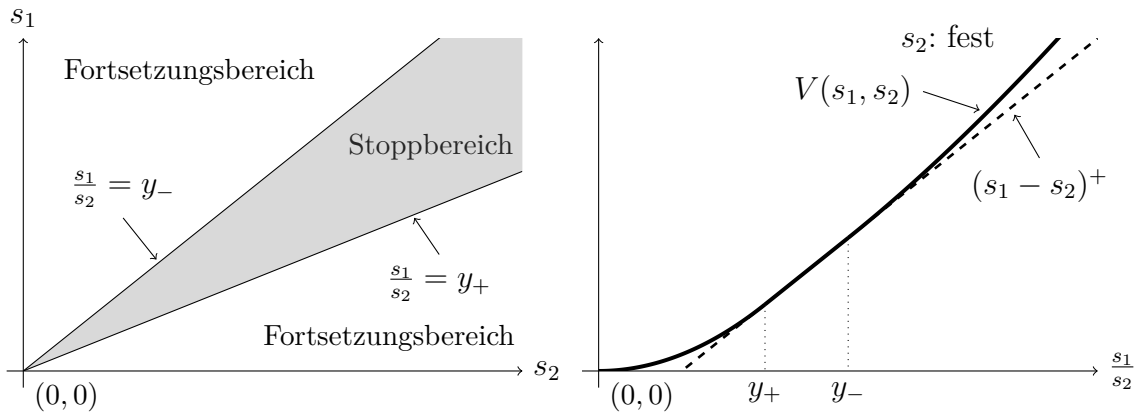


Abbildung 5: Das Stoppgebiet und die Wertfunktion im Fall (A3)

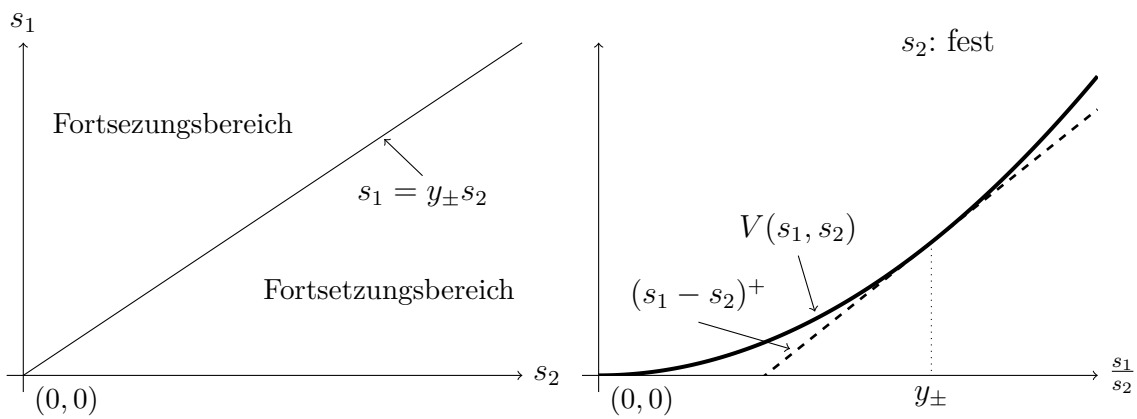


Abbildung 6: Stoppgebiet und Wertfunktion für den Spezialfall $y_+ = y_-$

δ_1 und δ_2 gelten hier also konkreter die Ungleichungen $\delta_2 < 0$ und $\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} - \sqrt{-2\delta_2\sigma^2} < \delta_1 < \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2}$. Insbesondere zahlen beide Aktien nicht positive Dividenden. Dadurch ergibt sich intuitiv ein ähnliches Bewertungsszenario wie zuvor im Fall A3. Analog zu A3 sind auch hier beide diskontierten Aktienpreisprozesse \mathbb{P}^* -Submartingale und es ist zu beurteilen, welche der beiden Aktien die Optionsauszahlung schneller gegen ∞ bzw. 0 treibt. Hierbei wird sich für A4 herausstellen, dass der Preis der ersten Aktie die Auszahlung schnell genug gegen ∞ treibt und dies somit der einzige arbitragefreie Preis ist. Der vorherige Ansatz über die Methode von Beibel/Lerche funktioniert für A4 jedoch nicht, da die Funktion g_{\pm} hier ebenfalls komplexe Werte annimmt und somit kein Maximum definiert ist. Den Wert der Exchange-Option erhält man daher nur über einen anderen Ansatz. Der arbitragefreie Preis unter diesen Bedingungen ist dann durch den folgenden Satz gegeben. Der Beweis orientiert sich in diesem Fall an den Ausführungen im Beweis von Proposition 2 bzw. Theorem 4 in [15]. Abbildung 7 skizziert noch einmal die Lage des Bereichs $D4$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene. Dabei sind die durch die Funktionen $\delta_1 = \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2}$ und $\delta_1 = \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} - \sqrt{-2\delta_2\sigma^2}$ eingezeichneten Ränder nicht Teil des Bereichs.

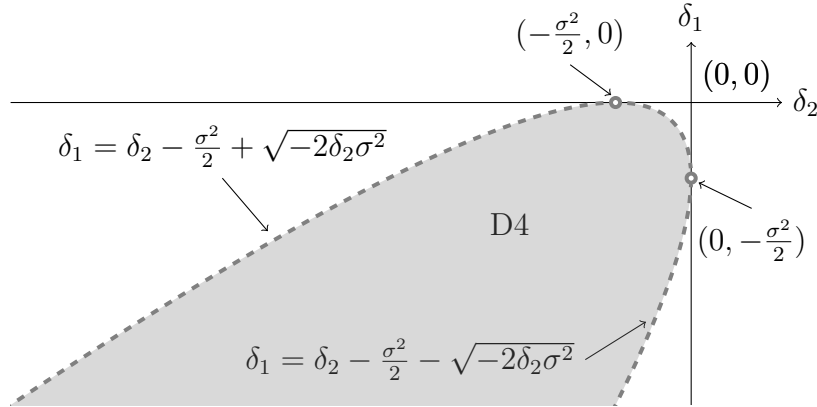


Abbildung 7: Darstellung von $D4$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene

Satz 2.3.6. Sind θ_+ und θ_- komplex, so ist der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option gegeben durch $V(s_1, s_2) = \infty$. Weiter existiert für jedes y mit $1 < y \leq \frac{s_1}{s_2}$ eine Stoppzeit $\tau_y := \inf\{t \geq 0 \mid \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = y\}$, sodass $\mathbb{E}[e^{-r\tau_y}(S_1(\tau_y) - S_2(\tau_y))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}] = \infty$. Das heißt, τ_y ist eine optimale Stoppzeit.

Beweis: Sei $y > 1$ gegeben und τ_y wie zuvor definiert. Sei weiter das Maß \mathbb{P}_2^* wie für den Fall A1 definiert durch

$$\frac{d\mathbb{P}_2^*}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{\sigma_2^2}{2} + \sigma_2 W_2^*(t)},$$

2.3 Die Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option

sodass $W_{12}^*(t) := W_1^*(t) - \rho\sigma_2 t$ und $W_{22}^*(t) := W_2^*(t) - \sigma_2 t$ Standard-Wiener-Prozesse bezüglich \mathbb{P}_2^* sind. Nach der Definition der Wertfunktion kann der Wert der Option dann abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} V(s_1, s_2) &\geq \mathbb{E}^*[e^{-r\tau_y}(S_1(\tau_y) - S_2(\tau_y))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}] \\ &= \mathbb{E}^*\left[e^{-r\tau_y} S_2(\tau_y) \left(\frac{S_1(\tau_y)}{S_2(\tau_y)} - 1\right)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}\right] \\ &= (ys_2 - s_2) \mathbb{E}_2^*[e^{-\delta_2 \tau_y} \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}]. \end{aligned}$$

Um hieraus die Behauptung des Satzes ableiten zu können, soll $\mathbb{E}_2^*[e^{-\delta_2 \tau_y} \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}] = \infty$ gezeigt werden. Dazu wird die Stoppzeit τ_y in eine andere Form umgeschrieben. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} &= y \\ \Leftrightarrow \frac{s_1}{s_2} e^{\delta_2 t - \delta_1 t + \frac{\sigma_2^2}{2} t - \frac{\sigma_1^2}{2} t + \sigma_1 W_1^*(t) - \sigma_2 W_2^*(t)} &= y \\ \Leftrightarrow \sigma_1 W_{12}^*(t) - \sigma_2 W_{22}^*(t) - (\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})t &= \ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right) \\ \Leftrightarrow \sigma \tilde{W}(t) - (\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})t &= \ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right), \end{aligned}$$

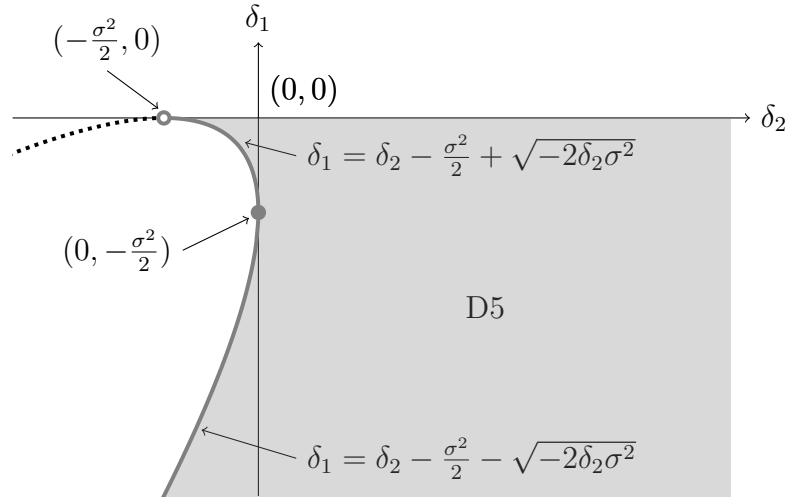
wobei $\tilde{W}(t) := (\sigma_1 W_{12}^*(t) - \sigma_2 W_{22}^*(t))/\sigma$ ein Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{P}_2^* ist. Dadurch kann die Stoppzeit τ_y geschrieben werden als

$$\tau_y = \inf \left\{ t > 0 : \sigma \tilde{W}(t) - (\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})t = \ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right) \right\}.$$

Genauer beschreibt τ_y also die Erstüberschreitungszeit eines Wiener-Prozesses mit Drift $-(\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})$ und Volatilität σ über eine Grenze $\ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right)$. Die Verteilungsdichte von τ_y ist dann nach Lemma 2.3.3 (i) gegeben durch

$$f_{\ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right)}(t) = \frac{\ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right) + (\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})t\right)^2}{\sigma^2 t}\right). \quad (45)$$

Mit Hilfe dieser Dichte ergibt sich dann $\mathbb{E}_2^*[e^{-\delta_2 \tau_y} \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}] = \int_0^\infty e^{-\delta_2 t} f_{\ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right)}(t) dt$. Lässt man nun t gegen ∞ laufen, konvergiert bereits der Ausdruck $e^{-\delta_2 t} f_{\ln\left(\frac{s_2 y}{s_1}\right)}(t)$ gegen ∞ ,


 Abbildung 8: Darstellung von $D5$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene

denn

$$\begin{aligned} & e^{-\delta_2 t} \frac{\left| \ln \left(\frac{s_2 y}{s_1} \right) \right|}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\ln \left(\frac{s_2 y}{s_1} \right) + (\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2}) t \right)^2}{\sigma^2 t}} \\ &= \frac{\left| \ln \left(\frac{s_2 y}{s_1} \right) \right|}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\ln \left(\frac{s_2 y}{s_1} \right)^2}{\sigma^2 t} - \frac{\ln \left(\frac{s_2 y}{s_1} \right) (\delta_1 - \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2} \left(\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2} \right)}. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2} < 0$ gilt, folgt demnach $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta_2 t} f_{\ln \left(\frac{s_2 y}{s_1} \right)}(t) = \infty$ und damit auch $\mathbb{E}^*[e^{-\delta_2 \tau_y} \mathbf{1}_{\{\tau_y < \infty\}}] = \infty$. Es gilt also $V(s_1, s_2) = \infty$ für eine beliebige Stoppzeit τ_y mit $1 < y \neq \frac{s_1}{s_2}$. \square

2.3.7 Fall (A5)

Der letzte noch offene Fall ist der Fall, in dem sowohl $\theta_- < 1$ als auch $\theta_+ < 1$ sind. Dadurch liefert eine Zerlegung mit der bisherigen Methode von Beibel/Lerche kein Ergebniss, da die Funktionen g_+ und g_- unter diesen Bedingungen kein eindeutiges Maximum aufweisen. Also muss eine Bewertung über eine andere Strategie stattfinden. Äquivalent lassen sich diese Bedingungen durch $\delta_1 < 0$ und $\delta_2 \geq \delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_1\sigma^2}$ ausdrücken. Dadurch sind direkte Bedingungen an die Dividendenzahlungen gegeben. Abbildung 8 zeigt den Bereich $D5$ in der (δ_1, δ_2) -Ebene. Die Funktion $\delta_1 = \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} - \sqrt{-2\delta_2\sigma^2}$ gehört mit zu $D5$. Ebenso bildet der grau markierte Teil der Funktion $\delta_1 = \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_2\sigma^2}$ für die Werte $-\frac{\sigma^2}{2} < \delta_2 \leq 0$ einen Teil von $D5$.

Intuitiv scheint der Wert der Option somit zumindest für die Dividendenfälle mit $\delta_2 \geq 0$ offensichtlich zu sein. Bezüglich des risikoneutralen Maßes ist der diskontierte Preisprozess der ersten Aktie aufgrund der negativen Dividende ein Submartingal. Da-

gegen stagniert bzw. sinkt der Wert der zweiten Aktie im Mittel. Deshalb kann durch beliebig langes Warten eine Auszahlung in beliebiger Höhe erreicht werden. Daher würde man intuitiv den arbitragefreien Preis der Option auf ∞ beziffern. Vor dem Hintergrund des Ergebnisses der Bewertung von A4 bleibt dieser arbitragefreie Preis noch bestehen, wenn die zweite Aktie negative Dividenden im oben beschriebenen Bereich zahlt. Der Wert der Option kann mit einem ähnlichen Ansatz wie im dividendenfreien Fall aber auch konkret berechnet werden. Folgender Satz liefert das Ergebnis der Bewertung. Die Formulierung des Satzes und seine Beweisstrategie entspricht dabei der von Satz 2.3.1.

Satz 2.3.7. *Für den Fall $\theta_+, \theta_- < 1$ ist der Wert der Perpetual-American-Exchange-Option gegeben durch $V(s_1, s_2) = \infty$. Weiter existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{(n)} = \infty$ fast sicher und*

$$V(s_1, s_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* [e^{-r\tau^{(n)}} (S_1(\tau^{(n)}) - S_2(\tau^{(n)}))^+ \mathbf{1}_{\{\tau^{(n)} < \infty\}}] = \infty.$$

Beweis: Es soll erneut gezeigt werden, dass mit der richtigen Strategie in Erwartung jede beliebig hohe Auszahlung erreicht werden kann. Diese Strategie wird einfach darin bestehen immer länger zu warten. Mit anderen Worten wird also untersucht, wie sich der Preis einer europäischen Exchange-Option verhält, wenn die Maturität gegen ∞ läuft. Für den Wert der europäischen Option gilt nach Kapitel 1

$$\begin{aligned} & V_e(s_1, s_2, t) \\ &= \mathbb{E}^* [e^{-rt} (S_1(t) - S_2(t))^+] \\ &= \mathbb{E}^* [e^{-rt} (S_1(t) - S_2(t)) \mathbf{1}_{\{S_1(t) > S_2(t)\}}] \\ &= \mathbb{E}^* [e^{-rt} S_1(t) \mathbf{1}_{\{S_1(t) > S_2(t)\}}] - \mathbb{E}^* [e^{-rt} S_2(t) \mathbf{1}_{\{S_1(t) > S_2(t)\}}] \\ &= s_1 e^{-\delta_1 t} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (-\delta_1 + \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \right) - s_2 e^{-\delta_2 t} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (-\delta_1 + \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \right). \end{aligned} \tag{46}$$

Definiert man für die amerikanische Option eine Folge von Stoppzeiten $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ durch $\tau^{(n)} = n$, so gilt $V(s_1, s_2) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} V_e(s_1, s_2, \tau_n)$. Zur einfacheren Notation wird im Folgenden die Bezeichnung

$$\Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s_1}{s_2} \right) + (-\delta_1 + \delta_2 \pm \frac{\sigma^2}{2})t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \right) =: h_{\pm}(t)$$

verwendet. Nun soll gezeigt werden, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_1 e^{-\delta_1 n} \Phi(h_+(n)) - s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(h_-(n)) = \infty. \quad (47)$$

Zunächst sei bemerkt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_+(n)) = 1$. Ausschlaggebend für die Konvergenz von $h_+(n)$ ist der Ausdruck $-\delta_1 + \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2}$. Mit Hilfe der gegebenen Voraussetzungen in *D5* lässt sich dieser abschätzen durch $-\delta_1 + \delta_2 + \frac{\sigma^2}{2} \geq -\delta_1 + (\delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_1\sigma^2}) + \frac{\sigma^2}{2} = \sqrt{-2\delta_1\sigma^2} > 0$. Daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} h_+(n) = \infty$ und es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_+(n)) = 1$. Um (47) zu belegen, soll eine Fallunterscheidung gemacht werden. Dazu wird der Bereich *D5* in den folgenden drei Fällen betrachtet:

1. **Fall:** $\delta_2 \geq 0$,
2. **Fall:** $\delta_2 < 0$ und $\delta_1 > -\frac{\sigma^2}{2}$,
3. **Fall:** $\delta_2 < 0$ und $\delta_1 \leq -\frac{\sigma^2}{2}$.

Im ersten Fall konvergiert $s_1 e^{-\delta_1 n}$ gegen ∞ , da $\delta_1 < 0$. Weiter ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_-(n)) \leq s_2$, da $e^{-\delta_2 n}$ in n monoton fällt und durch 0 nach unten beschränkt ist und $\Phi(h_-(n)) \in (0, 1)$. Damit folgt (47) und der erste Fall ist bereits abgeschlossen.

Für den zweiten Fall ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(h_-(n)) < \infty$ zu zeigen, da dann ebenfalls direkt (47) folgt. Zuvor soll aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_-(n)) = 0$ oder genauer $\lim_{n \rightarrow \infty} h_-(n) = -\infty$ gezeigt werden. Für die Konvergenz von $h_-(n)$ ist analog zu h_+ der Ausdruck $\delta_1 + \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2}$ entscheidend. Da $\delta_1 > -\frac{\sigma^2}{2}$ vorausgesetzt ist, lässt sich dies abschätzen durch $\delta_1 + \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} < \frac{\sigma^2}{2} + \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} = \delta_2 < 0$ und ist $\lim_{n \rightarrow \infty} h_-(n) = -\infty$. Dies kann im Folgenden genutzt werden, denn somit gilt für hinreichend großes n die Abschätzung $\int_{-\infty}^{h_-(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_{-\infty}^{h_-(n)} -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(h_-(n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h_-(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h_-(n)} -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s_2 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\delta_2 n} e^{-\frac{1}{2}(h_-(n))^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s_2 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\ln(\frac{s_1}{s_2})}{\sigma^2 n} - \frac{\ln(\frac{s_1}{s_2})(-\delta_1 + \delta_2 - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2} ((\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma_2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}) n}. \end{aligned} \quad (48)$$

Hier ist der letzte Exponent in (48) entscheidend für die Konvergenz, da der Rest gegen eine Konstante läuft. Es bleibt also $-\frac{\sigma^2}{2} ((\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma_2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}) \leq 0$ zu zeigen, damit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(h_-(n)) < \infty$ folgt. Dies ist jedoch durch die Voraussetzung $\theta_{\pm} \in \mathbb{R}$ garantiert, da der Ausdruck $(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\sigma_2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\delta_2}{\sigma^2}$ ebenfalls unter der Wurzel in der Definition

von θ_{\pm} zu finden ist und somit nicht negativ werden kann, da θ_+ und θ_- als reell vorausgesetzt sind. Dadurch folgt (47) also auch für den zweiten Fall.

Damit bleibt die Behauptung nur noch für den dritten Fall zu zeigen. Durch die gegebenen Voraussetzungen gilt für diesen Fall insbesondere $\delta_2 \geq \delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sqrt{-2\delta_1\sigma^2} \geq \delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2}$. Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} s_1 e^{-\delta_1 n} \Phi(h_+(n)) - s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(h_-(n)) &\geq s_1 e^{-\delta_1 n} \Phi(h_+(n)) - s_2 e^{-\delta_2 n} \Phi(h_+(n)) \\ &\geq \Phi(h_+(n)) (s_1 e^{-\delta_1 n} - s_2 e^{-\delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} n}) \\ &= \Phi(h_+(n)) (s_1 - s_2 e^{-\frac{\sigma^2}{2} n}) e^{-\delta_1 n}. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich dann auch für diesen Fall direkt (47) folgern, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_+(n)) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_1 - s_2 e^{-\frac{\sigma^2}{2} n}) = s_1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\delta_1 n} = \infty$. □

2.3.8 Zusammenfassung der Bewertung

Mit dem letzten Fall (A5) ist also die Bewertung der amerikanischen Exchange-Option mit unendlicher Laufzeit abgeschlossen. Der Zusammenhang zwischen den Werten von θ_+ und θ_- und den Ergebnissen der Bewertung wird noch einmal in Tabelle 1 auf einen Blick dargestellt. Die Form der Tabelle entspricht dabei der Tabelle 1 aus [15]. In den Fällen (A2) und (A3) kann die Methode von Beibel/Lerche zur Bewertung herangezogen werden. Dies hängt damit zusammen, dass genau in diesen beiden Fällen mindestens einer der Werte von θ_+ und θ_- größer als 1 ist, und daher eine geeignete Zerlegung mit Hilfe des Ansatzes aus Abschnitt 2.2 gefunden werden kann. Besonders im Fall (A3) ergibt sich eine sehr interessante Form des Stoppgebiets, da man durch $\theta_- > 1$ eine zweite Schwelle zum optimalen Stoppen erhält.

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen θ_{\pm} und dem Wert der Perpetual-American-Exchange-Option

Fall	θ_{\pm}	Stoppegebiet	Optionswert $V(s_1, s_2)$
(A0)	$\theta_+ = \theta_- = 1$	\emptyset	s_1
(A1)	$\theta_+ = 1, \theta_- < 1$	\emptyset	s_1
(A2)	$\theta_+ > 1, \theta_- \leq 1$	$[y^*, \infty)$ mit $y^* = \frac{\theta_+}{\theta_+ - 1}$	$\begin{cases} s_1 - s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} \geq y^*, \\ (y^*)^{-\theta_+} (y^* - 1) \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} < y^*. \end{cases}$
(A3)	$\theta_+ > 1, \theta_- > 1$	$[y_+, y_-]$ mit $y_+ = \frac{\theta_+}{\theta_+ - 1}$ und $y_- = \frac{\theta_-}{\theta_- - 1}$	$\begin{cases} y_-^{-\theta_-} (y_- - 1) \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_-} s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} > y_-, \\ s_1 - s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} \in [y_+, y_-], \\ y_+^{-\theta_+} (y_+ - 1) \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\theta_+} s_2 & \text{für } \frac{s_1}{s_2} < y_+. \end{cases}$
(A4)	θ_+ und θ_- komplex	\emptyset	∞
(A5)	$\theta_+ < 1, \theta_- < 1$	\emptyset	∞

3 Die Symmetrie von Carr

Neben der gewöhnlichen Put-Call-Parität existiert in einigen Finanzmarktmodellen noch ein weiterer Zusammenhang zwischen den Preisen von europäischen Put- und Call-Optionen. Die sogenannte Put-Call-Symmetrie soll beispielhaft im Folgenden in einem eindimensionalen Black-Scholes-Modell erläutert werden. Die Beschreibung stützt sich dabei auf [14]. Sei $C(0, S, K, T)$ der Preis einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt 0 auf die Aktie S mit Strike K und Laufzeit T . Entsprechend dazu sei $P(0, S, K, T)$ der Preis einer entsprechenden Put-Option. Weiter sei der Forwardpreisprozess von S zum Termin T definiert durch

$$M_t := S_t e^{r(T-t)} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

wobei $r \in \mathbb{R}$ hier die als konstant angenommene Zinsrate des Modells beschreibt. Die gewöhnliche Put-Call-Parität ist dann von der Form

$$C(0, S, K, T) = P(0, S, K, T) + S(0) - K e^{-rT}$$

und gilt in jedem Finanzmarktmodell. Die bereits erwähnte Put-Call-Symmetrie von Carr ist von der Form

$$C(0, S, K, T) = \frac{K}{M_0} P(0, S, \frac{M_0^2}{K}, T).$$

Diese lässt sich im Allgemeinen nicht auf jeden Finanzmarkt übertragen. Zu einem späteren Zeitpunkt soll aber noch genauer auf die Bedingungen eingegangen werden, die ein Finanzmarkt erfüllen muss, damit diese Symmetrie gilt. Liegt im Zeitpunkt 0 der Forwardpreis zum Termin T bei 100 Euro, so sagt die Symmetrie also beispielsweise aus, dass eine Call-Option mit Strike 200 denselben Wert hat, wie zwei Put-Optionen mit Strike 50 auf dasselbe Underlying (vgl. Beispiel in Kapitel 1 in [14]). Das Ziel dieses Kapitels wird es sein eine analoge Aussage zur Symmetrie von Carr für die europäische Exchange-Option im zweidimensionalen Modell zu entwickeln. Genauer gesagt, soll geklärt werden, welche Symmetrie zwischen den Preisen der Optionen besteht, wenn man die beiden Aktien in der Auszahlungsfunktion vertauscht. Das bedeutet, es werden Zusammenhänge zwischen den Optionspreisen der Optionen mit den Auszahlungsfunktionen $(S_i(T) - S_j(T))^+$ und $(S_j(T) - S_i(T))^+$ mit $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ gesucht. Der Aufbau und die Beweisführung im gesamten Kapitel orientiert sich dabei stark an [14]. Zunächst soll die Notation für den Preis der europäischen Exchange-Option ein wenig abgeändert werden. Dies geschieht, damit eindeutig ist, welche Aktie gegen welche eingetauscht werden kann. Außerdem werden später Exchange-Optionen auftreten, die

dem Inhaber erlauben im Zeitpunkt T eine festgelegte Anzahl an Einheiten der einen Aktie gegen eine bestimmte Anzahl an Einheiten der anderen Aktie zu tauschen. Von hier an bezeichne daher $V_{ij}(c; s_1, s_2, T)$ den Preis einer europäischen Option, welche zur Zeit T die Auszahlung $(cS_i(T) - S_j(T))^+$ liefert für $i \neq j \in \{1, 2\}$. Mit anderen Worten gibt die Option mit dieser Auszahlung dem Käufer das Recht eine Aktie j gegen c Einheiten der Aktie i einzutauschen. Bei der Bewertung solcher Optionen im Semimartingalmodell aus Kapitel 1.1 treten keine weiteren Schwierigkeiten auf, denn es gilt

$$(cS_i(T) - S_j(T))^+ = ((cs_i) \exp(\dots) - S_j(T))^+.$$

Somit entspricht beispielsweise die Berechnung von $V_{12}(c; s_1, s_2, T)$ genau der Berechnung der gewöhnlichen europäischen Exchange-Option bei c -fachem Anfangswert der ersten Aktie. Für den Fall $c = 1$ wird im Folgenden für den Wert der Exchange-Option einfach nur $V_{ij}(s_1, s_2, T)$ geschrieben. Zunächst soll in diesem Kapitel die Put-Call-Symmetrie von Carr im Black-Scholes-Modell genauer betrachtet werden. Anschließend liegt dann der Fokus darauf, eine analoge Aussage für europäische Exchange-Optionen im Black-Scholes-Modell zu erarbeiten. Dieses Ergebnis wird im Weiteren dann noch auf allgemeinere Finanzmarktsituationen ausgeweitet. Dabei soll die Symmetrie auch in einem Wiener-Prozess getriebenen, vollständigen Semimartingalmodell mit stochastischer Zinsrate betrachtet werden. Abschließend wird in diesem Kapitel noch beispielhaft eine mögliche Anwendung der Symmetrie von Carr bei der Bewertung von Barriere-Optionen gezeigt.

3.1 Put und Call im Black-Scholes-Modell

Im Folgenden soll die Put-Call-Symmetrie von Carr im dividendenfreien eindimensionalen Black-Scholes-Modell bewiesen werden. Dabei wird absichtlich auf eine andere Beweismethode als dem Nachrechnen der expliziten Formeln zurückgegriffen. Durch diesen Umweg wird später eine einfachere Übertragbarkeit auf andere Modelle gewährleistet sein. Des Weiteren wird sich zu einem späteren Zeitpunkt eine Symmetrie von Exchange-Optionen aus der Put-Call-Symmetrie ableiten lassen. Der Aktienpreisprozess unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{P}^* im vorliegenden Finanzmarktmodell sei also beschrieben durch $dS(t) = S(t)(r dt + \sigma dW^*(t))$ mit Anfangswert $S(0) = s$. Der folgende Satz und seine Beweisstrategie entsprechen den Ausführungen aus Kapitel 1 in [14].

Satz 3.1.1. *Gegeben sei ein eindimensionales dividendenfreies Black-Scholes-Modell. Sei $K > 0$ und bezeichne $M_t = S_t e^{r(T-t)}$ den Forwardpreisprozess der Aktie zum Termin*

T. Dann gilt zwischen den Preisen für Put- und Call-Optionen der Zusammenhang

$$C(0, S, K, T) = \frac{K}{M_0} P(0, S, \frac{M_0^2}{K}, T).$$

Beweis: Definiere zunächst das Maß \mathbb{M} durch

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} := \frac{M_t}{M_0}, \text{ für } 0 \leq t \leq T. \quad (49)$$

Die Put-Call-Symmetrie von Carr soll hier mit Hilfe der folgenden Behauptung (\star) für das Black-Scholes-Modell bewiesen werden.

(\star) : Die Verteilung von M_T bezüglich des risikoneutralen Maßes \mathbb{P}^* ist gleich der Verteilung von $\frac{M_0^2}{M_T}$ bezüglich des Maßes \mathbb{M} .

Beachtet man, dass $M_T = S_T$ gilt, so folgt aus (\star) direkt die Aussage des Satzes, denn dann gilt

$$\begin{aligned} C(0, S, K, T) &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}(M_T - K)^+] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[e^{-rT}(\frac{M_0}{M_T} - K)^+] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}(\frac{M_0}{M_T} - K)^+ \frac{M_T}{M_0}] = \frac{K}{M_0} \mathbb{E}^*[e^{-rT}(\frac{M_0^2}{K} - M_T)^+] \\ &= \frac{K}{M_0} P(0, S, \frac{M_0^2}{K}, T). \end{aligned}$$

Um (\star) zu beweisen, soll im Folgenden gezeigt werden, dass der Prozess $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich \mathbb{P}^* die gleiche stochastische Differentialgleichung erfüllt wie der Prozess $(\frac{M_0^2}{M_t})_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich \mathbb{M} . Es gilt

$$M_t = S(t)e^{r(T-t)} = se^{rT} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W^*(t)} = M_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W^*(t)}.$$

Damit ist $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal bezüglich \mathbb{P}^* und erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dM_t = M_t \sigma dW^*(t) \text{ mit Anfangswert } M_0 = se^{rT}.$$

Nach Girsanov ist der Prozess $W^{\mathbb{M}}(t) := W^*(t) - \sigma t$ für $0 \leq t \leq T$ ein Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{M} . Daher kann die Dynamik von $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich \mathbb{M} beschrieben werden durch die stochastische Differentialgleichung

$$dM_t = M_t(\sigma dW^{\mathbb{M}}(t) + \sigma^2 dt) \text{ mit Anfangswert } M_0 = se^{rT}. \quad (50)$$

Setzt man $f(M_t) = \frac{M_0^2}{M_t}$, so folgt aus der Itô-Formel mit Hilfe von (50)

$$\begin{aligned} df(M_t) &= -\frac{M_0^2}{M_t^2}dM_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{M_0^2}{M_t^3}d\langle M \rangle_t \\ &= -\frac{M_0^2}{M_t^2}M_t\sigma dW^{\mathbb{M}}(t) - \frac{M_0^2}{M_t^2}M_t\sigma^2 dt + \frac{M_0^2}{M_t^3}M_t^2\sigma^2 dt \\ &= -\frac{M_0^2}{M_t}\sigma dW^{\mathbb{M}}(t). \end{aligned}$$

Definiert man nun $\bar{W}^{\mathbb{M}}(t) := -W^{\mathbb{M}}(t)$ für $0 \leq t \leq T$, so ist $\bar{W}^{\mathbb{M}}$ ebenfalls ein M-Wiener-Prozess, und $(\frac{M_0^2}{M_t})_{0 \leq t \leq T}$ erfüllt bezüglich \mathbb{M} die gewünschte stochastische Differentialgleichung

$$d\frac{M_0^2}{M_t} = \frac{M_0^2}{M_t}\sigma d\bar{W}^{\mathbb{M}}(t) \text{ mit Anfangswert } M_0 = se^{rT}.$$

Damit ist die Behauptung (\star) gezeigt, und die Symmetrie von Carr gilt für das Black-Scholes-Modell. \square

Hier sei noch einmal betont, dass die Behauptung (\star) in diesem Beweis eine zentrale Rolle eingenommen hat. Somit spielt sie ebenfalls eine wichtige Rolle für die Gültigkeit der Put-Call-Symmetrie von Carr. Genauer soll auf die Bedeutung der Behauptung jedoch erst zu einem späteren Zeitpunkt eingegangen werden.

3.2 Exchange-Optionen im Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt soll eine analoge Aussage zur Put-Call-Symmetrie von Carr für europäische Exchange-Optionen im Black-Scholes-Modell entwickelt werden. In einem dividendenfreien zweidimensionalen Black-Scholes-Modell wird sich beispielsweise eine Symmetrie im Zeitpunkt 0 von der Form

$$V_{12}(s_1, s_2, T) = \frac{s_2}{s_1}V_{21}\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}; s_1, s_2, T\right) \tag{51}$$

zeigen. Um diese Symmetrie genauer zu beleuchten, seien zum Beispiel die Anfangspreise der Aktien gegeben durch $s_1 = 200$ Euro und $s_2 = 100$ Euro. Dann sagt diese Symmetrie aus, dass zwei Exchange-Optionen, welche jeweils das Recht beinhalten S_2 zu S_1 zu tauschen, den gleichen Wert wie eine Exchange-Option haben, die erlaubt, eine Aktie S_1 in 4 Aktien S_2 einzutauschen. In (51) könnte man annehmen, dass die Symmetrie im dividendenfreien Modell bereits aus der Homogenität der Auszahlungsfunktion folgt, was eine Übertragbarkeit auf beliebige Finanzmarktmodelle implizieren würde. Es ist aber zu beachten, dass neben dem Herausziehen des Faktors $\frac{s_2}{s_1}$ auch noch

die Underlyings der Option vertauscht wurden und sich die Symmetrieeigenschaft daher nicht so einfach übertragen lässt. Besonders bei der Betrachtung des Modells mit Dividendenzahlungen wird sich dies noch deutlicher herausstellen. Gegeben sei also ein zweidimensionales Black-Scholes-Modell. Genauer sei die Entwicklung des Geldmarktkontos beschrieben durch $\beta(t) = e^{rt}$ für $0 \leq t \leq T$ mit konstanter Zinsrate r . Weiter seien die Dynamiken der beiden Aktienpreisprozesse gegeben durch

$$dS_i(t) = S_i(t)((r - \delta_i)dt + \sigma_i dW_i^*(t)) \text{ mit Anfangswert } S_i(0) = s_i$$

für $i = 1, 2$ und $0 \leq t \leq T$. Definiere nun die beiden Forwardpreisprozesse $(M_1(t))_{0 \leq t \leq T}$ und $(M_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ der Aktien zum Termin T durch

$$M_i(t) := S_i(t)e^{(r-\delta_i)(T-t)} \text{ für } i = 1, 2.$$

Dabei ist zu beachten, dass die Dividendenzahlungen ebenfalls in den Forwardpreis mit einzubeziehen sind um eine Arbitrage zu vermeiden. Im Beweis von Satz 1.3.1 wurden bereits die beiden Maße \mathbb{P}_i^* für $i = 1, 2$ definiert. Für diese Maße gilt

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_T} := e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}T + \sigma_i W_i^*(T)} = \frac{M_i(T)}{M_i(0)}, \quad (52)$$

wodurch sie in gewisser Weise dem Maß \mathbb{M} aus (49) entsprechen. Der folgende Satz liefert eine analoge Aussage zur Put-Call-Symmetrie von Carr für die Exchange-Option.

Satz 3.2.1. *Sei ein zweidimensionales Black-Scholes-Modell mit stetigen, proportionalen Dividendenzahlungen δ_1 und δ_2 gegeben. Dann gilt für den Wert von europäischen Exchange-Optionen bei Startpreisen s_1 und s_2 im Zeitpunkt 0 die Symmetrie*

$$V_{12}(s_1, s_2, T) = \frac{M_2(0)}{M_1(0)} V_{21}\left(\frac{M_1^2(0)}{M_2^2(0)}; s_1, s_2, T\right). \quad (53)$$

Dabei ist $M_i(t) := S_i(t)e^{(r-\delta_i)(T-t)}$ für $i = 1, 2$ der Forwardpreis der i -ten Aktie zum Termin T .

Beweis: Für den Wert der europäischen Exchange-Option gilt

$$\begin{aligned} V_{12}(s_1, s_2, T) &= \mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_1(T) - S_2(T))^+] \\ &= \mathbb{E}^*[e^{-rT} S_2(T) \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1\right)^+] \\ &= s_2 e^{-\delta_2 T} \mathbb{E}_2^*\left[\left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1\right)^+\right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Der letzte Term in (54) soll nun mit dem Preis einer Call-Option auf $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ mit Strike 1 verglichen werden. Betrachtet man $\frac{S_1(T)}{S_2(T)}$ genauer, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{S_1(T)}{S_2(T)} &= \frac{s_1 e^{(r-\delta_1-\frac{\sigma_1^2}{2})T+\sigma_1 W_1^*(T)}}{s_2 e^{(r-\delta_2-\frac{\sigma_2^2}{2})T+\sigma_2 W_2^*(T)}} \\ &= \frac{s_1}{s_2} e^{(-\delta_1+\delta_2-\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2})T+\sigma_1 W_1^*(T)-\sigma_2 W_2^*(T)} \\ &= \frac{s_1}{s_2} e^{(-\delta_1+\delta_2)T-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma_1 W_{12}^*(T)-\sigma_2 W_{22}^*(T)}. \end{aligned}$$

Dabei sind W_{12}^* und W_{22}^* die im Beweis zu Satz 1.3.1 definierten Wiener-Prozesse bezüglich \mathbb{P}_2^* . Definiert man dann \tilde{W} , \tilde{r} und \tilde{s} durch

$$\tilde{W}(t) := \frac{\sigma_1 W_{12}^*(t) - \sigma_2 W_{22}^*(t)}{\sigma}, \quad \tilde{r} := -\delta_1 + \delta_2 \quad \text{und} \quad \tilde{s} := \frac{s_1}{s_2},$$

so ist \tilde{W} ein Wiener-Prozess bezüglich \mathbb{P}_2^* und es gilt

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \tilde{s} e^{\tilde{r}t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma \tilde{W}(t)}.$$

Dadurch kann $\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)_{0 \leq t \leq T} =: (S(t))_{0 \leq t \leq T}$ auch als Preisprozess in einem eindimensionalen Black-Scholes-Modell ohne Dividendenzahlungen und konstanter Zinsrate $\tilde{r} \in \mathbb{R}$ aufgefasst werden. Das äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß ist dann bereits durch \mathbb{P}_2^* gegeben. Es sei angemerkt, dass für den Beweis der Put-Call-Symmetrie von Carr nicht explizit $r > 0$ gefordert wurde. Somit ist die Symmetrie auch in diesem Modell gültig. Weiter gilt natürlich auch hier $\frac{S_1(T)}{S_2(T)} = \frac{M_1(T)}{M_2(T)}$. Damit lässt sich auf (54) die Symmetrie aus dem eindimensionalen Modell anwenden und es gilt

$$\begin{aligned} V_{12}(s_1, s_2, T) &= s_2 e^{-\delta_2 T} \mathbb{E}_2^* \left[\left(\frac{M_1(T)}{M_2(T)} - 1 \right)^+ \right] \\ &= s_2 e^{-\delta_2 T} \frac{M_2(0)}{M_1(0)} \mathbb{E}_2^* \left[\left(\frac{M_1^2(0)}{M_2^2(0)} - \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \right)^+ \right] \\ &= \frac{M_2(0)}{M_1(0)} \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} S_2(T) \left(\frac{M_1^2(0)}{M_2^2(0)} - \frac{S_1(T)}{S_2(T)} \right)^+ \right] \\ &= \frac{M_2(0)}{M_1(0)} \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} \left(\frac{M_1^2(0)}{M_2^2(0)} S_2(T) - S_1(T) \right)^+ \right] \\ &= \frac{M_2(0)}{M_1(0)} V_{21} \left(\frac{M_1^2(0)}{M_2^2(0)}; s_2, s_1, T \right). \end{aligned}$$

□

Auch hier wurde der Beweis wieder recht allgemein gehalten um ihn später auf andere Modelle übertragen zu können. In (54) wurde angewandt, dass die Dividendenzahlungen eine deterministische Struktur aufweisen um sie als Faktor aus dem Erwartungswert herausziehen zu können. Bei stochastischen Dividendenzahlungen treten an dieser Stelle weitere Probleme auf, die im Umfang dieser Arbeit nicht behandelt werden sollen. Desweiteren wurde eine zur Behauptung (\star) ähnliche Aussage verwendet. Sei die Behauptung ($\star\star$) gegeben durch

($\star\star$) : Die Verteilung von $\frac{M_1(T)}{M_2(T)}$ bezüglich des Maßes \mathbb{P}_2^* ist gleich der Verteilung von $\frac{M_1^2(0)M_2(T)}{M_2^2(0)M_1(T)}$ unter dem Maß \mathbb{P}_1^* .

Das Maß \mathbb{P}_1^* lässt sich dabei auch definieren durch

$$\frac{d\mathbb{P}_1^*}{d\mathbb{P}_2^*} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{M_1(T)M_2(0)}{M_2(T)M_1(0)}.$$

Für den letzten Teil des obigen Beweises scheint diese Behauptung entscheidend dafür zu sein, ob die Symmetrie von Carr im betrachteten Finanzmarktmodell gilt. Weiter sei für den dividendenfreien Fall erwähnt, dass $\frac{M_1(0)}{M_2(0)} = \frac{s_1}{s_2}$ gilt. Somit erhält die Symmetrie die Form aus (51).

3.3 Die Symmetrie in einem vollständigen Marktmodell

In diesem Abschnitt soll die Symmetrie von Carr in einer verallgemeinerten Situation betrachtet werden. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei wieder an den Ausführungen in [14]. Hier wird jedoch ein allgemeineres Finanzmarktmodell betrachtet. Dem neuen Marktmodell soll wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ zugrunde liegen. Das Modell habe den Handelszeitraum $[0, T]$ für ein $T < \infty$. Weiter soll der Zufall im Marktmodell nun durch drei korrelierende Wiener-Prozesse W_1^* , W_2^* und Z^* getrieben werden. Die Korrelation zwischen W_1^* und W_2^* sei wieder beschrieben durch $\langle W_1^*, W_2^* \rangle_t = \int_0^t \rho(s) ds$ und außerdem gelte $\langle Z^*, W_i^* \rangle = \int_0^t \rho_i(s) ds$ für $i = 1, 2$. Dabei seien ρ , ρ_1 und ρ_2 deterministische zeitabhängige Funktionen. Für den Handelszeitraum sei der Informationsverlauf in dem Modell beschrieben durch eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, d. h., $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ sei die von den drei Wiener-Prozessen erzeugte Filtration. Die Zinsrate $r(t)$ wird als progressiv messbarer Prozess bezüglich Z^* angenommen, sodass die Wertentwicklung des Geldmarktkontos gegeben ist durch

$$\beta(t) = \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \text{ für } 0 \leq t \leq T.$$

Insbesondere liegt dadurch nun ein stochastischer Verlauf der Zinsstrukturkurve vor. Es wird angenommen, dass $\mathbb{E}^* \left[\frac{1}{\beta(t)} \right] < \infty$. Die Preisprozesse der beiden Aktien seien

analog zum Semimartingalmodell aus Kapitel 1.1 bestimmt durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)((r(t) - \delta_i(t))dt + \sigma_i(t)dW_i^*(t)) \text{ mit Anfangswert } S_i(0) = s_i$$

für $i = 1, 2$ und $0 \leq t \leq T$. Die Dividendenzahlungen werden innerhalb dieses Modells als deterministische, zeitabhängige Funktionen vorausgesetzt. Damit das Modell vollständig bleibt, wird das Modell noch um einen T -Bond $B(t, T)$ als weiteres handelbares Finanzgut ergänzt. Der Begriff T -Bond bezeichnet hier ein Wertpapier, genauer eine Nullkuponanleihe, welche im Zeitpunkt T eine Geldeinheit zahlt und sonst keinerlei Zinszahlungen leistet. Der Preisprozess des T -Bonds sei dabei gegeben durch

$$dB(t, T) = B(t, T)(r(t)dt + \sigma_B(t, T)dZ^*(t)) \text{ mit einem Anfangswert } B(0, T)$$

für $0 \leq t \leq T$. Diese Differentialgleichung wird dann gelöst durch

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left(\int_0^t r(s) - \frac{1}{2} \sigma_B^2(s, T) ds + \int_0^t \sigma_B(s, T) dZ^*(s) \right).$$

Durch die Ergänzung des T -Bonds stimmt die Anzahl der handelbaren Finanzgüter mit der Anzahl der treibenden Wiener-Prozesse überein, wodurch das Modell vollständig ist. Das Maß \mathbb{P}^* sei dabei bereits das eindeutige äquivalente Martingalmaß. Weiter werden mit $(M_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ für $i = 1, 2$ die Forwardpreisprozesse der beiden Aktien bezeichnet. Bei einer konkreten Definition der Forwardpreise ist zu beachten, dass Dividendenzahlungen der Aktien ebenfalls Auswirkungen auf den Forwardpreis haben. So lassen sich in diesem Modell die Forwardpreise definieren durch

$$M_i(t) := \frac{S_i(t)}{B(t, T)} \exp \left(- \int_t^T \delta_i(s) ds \right) \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } 0 \leq t \leq T.$$

Zu bemerken ist, dass aufgrund der stochastischen Zinsrate in diesem Modell das äquivalente Martingalmaß nicht mit dem Forwardmartingalmaß übereinstimmt. Im Fall des Black-Scholes-Modell waren diese beiden Maße noch identisch, sodass die beiden Maße \mathbb{P}_1^* und \mathbb{P}_2^* wie in (52) definiert werden konnten. In diesem Modell mit stochastischen Zinsen ist es jedoch nötig diese beiden Maße zu unterscheiden. Mit Hilfe des T -Bondpreises lässt sich das Forwardmartingalmaß \mathbb{P}^T zum Termin T definieren durch

$$\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T)}{B(0, T)} \exp \left(- \int_0^t r(s) ds \right) = \exp \left(\int_0^t \sigma_B(s, T) dZ^*(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_B^2(s, T) ds \right)$$

für $0 \leq t \leq T$. Die Übergangsdichte zum Forwardmartingalmaß stammt dabei aus Kapitel 10 von [12]. Dort sind ebenfalls weitere Details zur Herleitung der Dichte nachzulesen. Nach dem Satz von Girsanov sind

$$Z^T(t) := Z^*(t) - \int_0^t \sigma_B(s, T) ds \text{ und } W_i^T(t) := W_i^*(t) - \int_0^t \rho_i(s) \sigma_B(s, T) ds$$

für $i = 1, 2$ Wiener Prozesse unter \mathbb{P}^T . Für die Forwardpreise gilt dann

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \frac{s_i}{B(0, T)} \exp\left(-\int_0^T \delta_i(s) ds\right) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t -\sigma_i^2(s) + \sigma_B^2(s, T) ds\right) \\ &\quad + \int_0^t \sigma_i(s) dW_i^*(s) - \int_0^t \sigma_B(s, T) dZ^*(s) \\ &= \frac{s_i}{B(0, T)} \exp\left(-\int_0^T \delta_i(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t \sigma_i(s) dW_i^T(s) - \int_0^t \sigma_B(s, T) dZ^T(s)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) - 2\rho_i(s) \sigma_i(s) \sigma_B(s, T) + \sigma_B^2(s, t) ds\right). \end{aligned}$$

Da die Dividendenzahlungen als deterministisch vorausgesetzt sind, sind die Forwardpreise also tatsächlich Martingale unter \mathbb{P}^T . Vom Forwardmartingalmaß lässt sich der Wechsel zu den beiden Aktienmartingalmaßen \mathbb{P}_1^* und \mathbb{P}_2^* beschreiben durch

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*}{d\mathbb{P}^T} \Big|_{\mathcal{F}_T} := \frac{M_i(T)}{M_i(0)} \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (55)$$

In diesem Finanzmarktmodell soll nun eine erweiterte Version der Symmetrie von Exchange-Optionen für endliche Stoppzeiten definiert werden.

Proposition 3.3.1. *Sei τ eine Stoppzeit mit $0 \leq \tau \leq T$. Es heißt, dass die Symmetrie von Carr für τ erfüllt ist (im Folgenden mit SC_τ bezeichnet), falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

- (i) *Die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_1(T)M_2(\tau)}{M_2(T)M_1(\tau)}$ gegeben \mathcal{F}_τ unter \mathbb{P}_2^* ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_2(T)M_1(\tau)}{M_1(T)M_2(\tau)}$ gegeben \mathcal{F}_τ unter \mathbb{P}_1^* .*
- (ii) *Für jede nichtnegative Auszahlungsfunktion $G = G(x, y)$, die positiv homogen vom Grad 1 in beiden Variablen ist, gilt unter dem Forwardmartingalmaß die Gleichheit*

$$\mathbb{E}^T[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^T\left[\frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} G\left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} M_2(T), M_1(T)\right) | \mathcal{F}_\tau\right].$$

- (iii) *Für jede nichtnegative Auszahlungsfunktion $G = G(x, y)$, die positiv homogen vom Grad 1 in beiden Variablen ist, gilt unter dem äquivalenten Martingalmaß*

die Gleichheit

$$\mathbb{E}^* \left[e^{\int_{\tau}^T r(s) ds} G(S_1(T), S_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau} \right] = \mathbb{E}^* \left[e^{\int_{\tau}^T r(s) ds} \frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} G\left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} S_2(T), S_1(T)\right) | \mathcal{F}_{\tau} \right].$$

Beweis: Hier soll zunächst die Äquivalenz der beiden Aussagen (i) und (ii) gezeigt werden. Die Äquivalenz von (ii) zu (iii) ist dann im Anschluss schnell einzusehen. Um die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen wird die zu (i) äquivalente Aussage (i)' aufgestellt.

(i)' : Die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_1(T)}{M_2(T)}$ gegeben \mathcal{F}_{τ} unter \mathbb{P}_2^* ist gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_2(T)M_1^2(\tau)}{M_1(T)M_2^2(\tau)}$ gegeben \mathcal{F}_{τ} unter \mathbb{P}_1^* .

Die Äquivalenz der beiden Aussagen (i) und (i)' folgt direkt aus der \mathcal{F}_{τ} -Messbarkeit von $M_1(\tau)$ und $M_2(\tau)$. Zeige nun also (i)' \Leftrightarrow (ii).

(i)' \Rightarrow (ii) :

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^T [G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau}] &= \mathbb{E}^T \left[M_2(T) G\left(\frac{M_1(T)}{M_2(T)}, 1\right) | \mathcal{F}_{\tau} \right] \\ &= \mathbb{E}_2^* \left[M_2(T) G\left(\frac{M_1(T)}{M_2(T)}, 1\right) \frac{M_2(0)}{M_2(T)} | \mathcal{F}_{\tau} \right] \frac{M_2(\tau)}{M_2(0)} \\ &= \mathbb{E}_2^* \left[G\left(\frac{M_1(T)}{M_2(T)}, 1\right) | \mathcal{F}_{\tau} \right] M_2(\tau) \\ &\stackrel{(i)'}{=} \mathbb{E}_1^* \left[G\left(\frac{M_1^2(\tau)M_2(T)}{M_2^2(\tau)M_1(T)}, 1\right) | \mathcal{F}_{\tau} \right] M_2(\tau) \\ &= \mathbb{E}^T \left[G\left(\frac{M_1^2(\tau)M_2(T)}{M_2^2(\tau)M_1(T)}, 1\right) \frac{M_1(T)}{M_1(0)} | \mathcal{F}_{\tau} \right] \frac{M_1(0)}{M_1(\tau)} M_2(\tau) \\ &= \mathbb{E}^T \left[\frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} G\left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} M_2(T), M_1(T)\right) | \mathcal{F}_{\tau} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Neben der Homogenität von G wurde hier mehrfach verwendet, dass sowohl $M_i(0)$ als auch $M_i(\tau)$ für $i = 1, 2$ messbar sind bezüglich \mathcal{F}_{τ} . Desweiteren konnte für die Maßwechsel die Formel von Bayes verwendet werden, da $M_i(T)$ für $i = 1, 2$ messbar ist bezüglich \mathcal{F}_T .

(ii) \Rightarrow (i)' :

Die Rückrichtung folgt, da wegen (ii) für jede positiv homogene Funktion G die Gleich-

heit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_2^* \left[G \left(\frac{M_1(T)}{M_2(T)}, 1 \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] &= \mathbb{E}^T \left[G \left(\frac{M_1(T)}{M_2(T)}, 1 \right) \frac{M_2(T)}{M_2(0)} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \frac{M_2(0)}{M_2(\tau)} \\
 &= \mathbb{E}^T \left[G(M_1(T), M_2(T)) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \frac{1}{M_2(\tau)} \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \mathbb{E}^T \left[\frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} G \left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} M_2(T), M_1(T) \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \frac{1}{M_2(\tau)} \\
 &= \mathbb{E}_1^* \left[\frac{1}{M_1(\tau)} G \left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} M_2(T), M_1(T) \right) \frac{M_1(0)}{M_1(T)} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \frac{M_1(\tau)}{M_1(0)} \\
 &= \mathbb{E}_1^* \left[G \left(\frac{M_1^2(\tau) M_2(T)}{M_2^2(\tau) M_1(T)}, 1 \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right]
 \end{aligned}$$

gilt. Daher muss die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_1(T)}{M_2(T)}$ gegeben \mathcal{F}_τ unter \mathbb{P}_2^* gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_2(T)M_1^2(\tau)}{M_1(T)M_2^2(\tau)}$ gegeben \mathcal{F}_τ unter \mathbb{P}_1^* sein. Entscheidend ist hier unter anderem die lineare Homogenität in beiden Variablen, da es somit möglich ist einzelne Faktoren aus der Funktion herauszuziehen. Ansonsten wurden keine weiteren Eigenschaften an die Funktion G gefordert. Damit ist die Äquivalenz von (i) und (ii) gezeigt.

(ii) \Leftrightarrow (iii) :

Aufgrund der \mathcal{F}_τ -Messbarkeit von $B(\tau, T)$ und wegen $B(T, T) = 1$ ist die Aussage (ii) äquivalent dazu, dass die Gleichheit

$$\mathbb{E}^T \left[\frac{B(\tau, T)}{B(T, T)} G(M_1(T), M_2(T)) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = \mathbb{E}^T \left[\frac{B(\tau, T)}{B(T, T)} \frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} G \left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} M_2(T), M_1(T) \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right]. \quad (57)$$

für jede linear positiv homogene, nichtnegative Auszahlungsfunktion G gilt. Da $S_i(T) = M_i(T)$ ergibt sich aus (57) durch einen Maßwechsel zu $\mathbb{P}^*(\tau)$ die gewünschte Gleichung

$$\mathbb{E}^* \left[e^{\int_\tau^T r(s) ds} G(S_1(T), S_2(T)) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = \mathbb{E}^* \left[e^{\int_\tau^T r(s) ds} \frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} G \left(\frac{M_1^2(\tau)}{M_2^2(\tau)} S_2(T), S_1(T) \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right].$$

□

Durch Teil (iii) der Proposition erhält man also eine Symmetrie von europäischen Optionspreisen. Mit $G(x, y) = (x - y)^+$ ergibt sich direkt die gewünschte Symmetrie für Exchange-Optionen.

Bemerkung. In Modellen ohne Dividendenzahlungen gilt für den Quotienten der Forwardpreise $\frac{M_1(t)}{M_2(t)} = \frac{S_1(t)}{S_2(t)}$. Diese Gleichheit ergibt sich direkt aus der Definition der Forwardpreise. In dividendenfreien Finanzmarktmodellen kann die Symmetrie von Carr

demnach direkt in Abhängigkeit der Aktienpreise geschrieben werden. Im Fall der europäischen Exchange-Option erhält sie beispielsweise die Form

$$\mathbb{E}^* [e^{\int_{\tau}^T r(s) ds} (S_1(T) - S_2(T))^+ | \mathcal{F}_{\tau}] = \frac{S_1(\tau)}{S_2(\tau)} \mathbb{E}^* [e^{\int_{\tau}^T r(s) ds} \left(\frac{S_1^2(\tau)}{S_2^2(\tau)} S_2(T) - S_1(T) \right)^+ | \mathcal{F}_{\tau}].$$

Für das Black-Scholes Modell entspricht sie dann der bereits in (51) erwähnten Form.

Im Folgenden soll die Symmetrie von Carr anhand eines Beispiels noch einmal genauer beleuchtet werden.

3.3.1 Die Symmetrie von Carr im Vasicek-Modell

Als Beispiel soll nun die Symmetrie von Carr in einem Modell mit stochastischer Zinsrate betrachtet werden. Dazu wird zu Beginn das Zinsstrukturmodell von Vasicek vorgestellt, wobei ausführlich auf den Preis eines T-Bonds und das Forwardmartingalmaß eingegangen werden soll. Das eigentliche Vasicek-Modell beinhaltet die Modellierung der Short-Rate durch einen einzigen stochastischen Prozess. In diesem Abschnitt soll das Vasicek-Modell dann um zwei Aktienpreise ergänzt werden, sodass ein vollständiges Marktmodell wie in Abschnitt 3.3 vorliegt. Die folgende Beschreibung des Vasicek-Modells orientiert sich dabei an Abschnitt 5.1 aus [2]. Gegeben sei also ein Finanzmarktmodell, in dem die Zinsrate durch einen Vasicek-Prozess beschrieben wird. Konkret wird dabei angenommen, dass die Zinskurve die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_r dZ^*(t) \text{ mit Anfangsbedingung } r(0) = r_0$$

erfüllt. Dadurch erhält man dann den zusätzlichen zufallstreibenden Wiener-Prozess Z^* . Der Parameter $\sigma_r > 0$ stellt in der oben aufgeführten Differentialgleichung die Volatilität der Zinskurve dar. Durch $b \in \mathbb{R}$ ist das sogenannte *Long Term Mean Reversion Level* gegeben, d. h., die Zinskurve wird nach Ausbrüchen immer wieder zu diesem Wert zurückgezogen. Dies ist daran gut zu erkennen, dass die Drift des Prozesses ihr Vorzeichen wechselt, abhängig davon, ob $b < r(t)$ oder $b > r(t)$. Zuletzt wird durch $a > 0$ die Geschwindigkeit angegeben, mit der der Prozess zu dem mean reversion level zurückkehrt. Der Prozess $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$ lässt sich durch Lösen der Differentialgleichung auch in expliziter Form angeben als

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma_r \int_0^t e^{-a(t-s)} dZ^*(s).$$

Der Wert des Prozesses $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$ ist dann normalverteilt und es gilt

$$r(t) \sim \mathcal{N} \left(r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right) \right). \quad (58)$$

Das Resultat aus (58) soll an dieser Stelle nicht genauer begründet werden. Es wird jedoch ausführlich in Abschnitt 5.1.1 von [2] erläutert. Hier ist auch wieder gut zu erkennen, dass $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$ für $t \rightarrow \infty$ im Mittel das Mean Reversion Level annimmt. Der Wertverlauf des Geldmarktkontos $(\beta(t))_{0 \leq t \leq T}$ lässt sich unter diesen Voraussetzungen definieren durch $\beta(t) := \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right)$. Dabei wurde $\beta(0) = 1$ angenommen. Weiter seien in diesem Marktmodell die Preisprozesse von zwei Aktien, wie in einem Black-Scholes-Modell, gegeben durch

$$dS_i(t) = r(t)dt - \delta_i dt + \sigma_i dW_i^*(t) \text{ mit Anfangswert } S_i(0) = s_i$$

für $i = 1, 2$. Die Parameter δ_i und σ_i werden hier als konstant vorausgesetzt. Es sei jedoch angemerkt, dass sich für die folgenden Resultate keine gravierenden Änderungen ergeben, falls diese Parameter durch deterministische Funktionen ersetzt werden. Das um die beiden Aktienpreisprozesse erweiterte Marktmodell stellt einen Spezialfall des zu Beginn von Abschnitt 3.3 vorgestellten vollständigen Modells dar. Ziel wird es sein, zu zeigen, dass die Bedingung (i) aus Proposition 3.3.1 erfüllt ist und somit die Symmetrie von Carr in diesem Modell gilt. Auch hier wird angenommen, dass die Prozesse Z^* , W_1^* und W_2^* bereits Wiener-Prozesse bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{P}^* sind, sodass die Dynamiken von $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$, $(S_1(t))_{0 \leq t \leq T}$ und $(S_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ unter dem äquivalenten Martingalmaß bereits bekannt sind. Die Korrelation der Wiener-Prozesse sei im Weiteren als konstant angenommen und gegeben durch $\langle W_1^*, W_2^* \rangle_t = \rho t$ bzw. $\langle Z^*, W_i^* \rangle = \rho_i t$ für $i = 1, 2$. Nutzt man das Geldmarktkonto als Numéraire, so kann ein arbitragefreier Preisprozess der europäischen Exchange-Option bestimmt werden durch

$$V_{12}(S_1(t), S_2(t), T) = \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) (S_1(T) - S_2(T))^+ | \mathcal{F}_t \right].$$

Dazu lassen sich wieder die beiden Maße \mathbb{P}_i^* durch

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*}{d\mathbb{P}^*} |_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_i(t)}{s_i} \exp \left(- \int_0^t r(s) + \delta_i ds \right) = \exp \left(\sigma_i dW_i^*(t) - \frac{1}{2} \sigma_i^2 t \right)$$

definieren. Der Maßwechsel zu \mathbb{P}_i^* kann dann als Wechsel des Numéraires vom Geldmarktkonto zu $(S_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ interpretiert werden. Für den Optionspreis ergibt sich dann

analog zum Fall mit deterministischer Zinsrate

$$\begin{aligned} V_{12}(s_1, s_2, T) &= \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \int_0^T r(s) \, ds \right) (S_1(T) - S_2(T))^+ \right] \\ &= s_1 e^{-\delta_1 T} \mathbb{P}_1^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right) - s_2 e^{-\delta_2 T} \mathbb{P}_2^* \left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} > 1 \right). \end{aligned}$$

Um den Satz 3.3.1 in diesem Modell anzuwenden, soll auch hier das Forwardmartingalmaß betrachtet werden. Dazu ist zunächst der Preisprozess des T -Bonds genauer zu untersuchen. Der Preisprozess $(B(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ eines T -Bonds ist durch

$$B(t, T) := \mathbb{E}^* \left[\exp \left(\int_t^T r(s) \, ds \mid \mathcal{F}_t \right) \right] \quad (59)$$

gegeben. Hier ist noch einmal gut zu erkennen, dass im Falle deterministischer Zinsen $B(t, T) = \exp \left(\int_t^T r(s) \, ds \right)$ gilt und somit die Wertentwicklungen von Nullkuponanleihe und Geldmarktkonto übereinstimmen. Im vorliegenden Vasicek-Modell ist dies nicht der Fall. Es kann wieder angenommen werden, dass die Dynamik des T -Bonds von der Form

$$dB(t, T) = B(t, T)(r(t)dt + \sigma_B(t, T)dZ_t^*)$$

ist. Im Folgenden ist dann nur noch die lokale Volatilität $\sigma_B(t, T)$ genauer zu bestimmen. Aus der allgemeinen Literatur zum Vasicek-Modell ist bekannt, dass der T -Bond-Preisprozess sich schreiben lässt als

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp(\alpha(t, T) - \beta(t, T)r(t)) \quad \text{mit } \beta(t, T) := \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \\ \text{und } \alpha(t, T) &:= \left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (\beta(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4a} \beta^2(t, T) \right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Diese Darstellung folgt aus der genaueren Berechnung des Erwartungswertes in (59) und soll hier nicht nachgewiesen werden. Ihre Herleitung ist jedoch im Beweis von Satz 5.10 in [2] nachzulesen. Die folgende Berechnung der Dynamik von $B(t, T)$ orientiert sich an der Argumentation in [4]. Mit Hilfe der neuen Darstellung lässt sich $B(t, T)$ als Funktion in Abhängigkeit von der Zeit und der Zinsrate auffassen. Setzt man dazu

$F(t, r(t)) := \exp(\alpha(t, T) - \beta(t, T)r(t))$, so liefert die Itô-Formel

$$\begin{aligned} dF(t, r(t)) &= \partial_t F(t, r(t))dt + \partial_r F(t, r(t))dr(t) + \frac{1}{2}\partial_r^2 F(t, r(t))d\langle r \rangle_t \\ &= (\alpha_t(t, T) - \beta_t(t, T)r(t))F(t, r(t))dt - \beta(t, T)F(t, r(t))dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\beta^2(t, T)F(t, r(t))d\langle r \rangle_t. \end{aligned} \tag{60}$$

Hier bezeichnet $\alpha_t(t, T)$ bzw. $\beta_t(t, T)$ die jeweilige Ableitung nach der Zeitkomponente. Ersetzt man nun in (60) die Funktion F wieder durch $B(t, T)$ und beachtet die Definition von $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= B(t, T)((\alpha_t(t, T) - \beta_t(t, T))dt) - B(t, T)(\beta(t, T)a(b - r(t))dt \\ &\quad - \beta(t, T)\sigma_r dZ^*(t)) + B(t, T)\left(\frac{1}{2}\beta^2(t, T)\sigma_r^2 dt\right) \\ &= B(t, T)([\alpha_t(t, T) - \beta_t(t, T)r(t) - \beta(t, T)a(b - r(t)) + \frac{1}{2}\beta^2(t, T)\sigma_r^2]dt \\ &\quad - \beta(t, T)\sigma_r dZ^*(t)). \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt vereinfacht sich der Driftterm in den eckigen Klammern zu $r(t)$, da der diskontierte Preisprozess ein \mathbb{P}^* -Martingal ist. Alternativ ließe sich dies auch mit Hilfe der konkreten Definitionen von $\alpha(t, T)$ und $\beta(t, T)$ nachrechnen. Die Dynamik des T-Bonds ist dadurch dann gegeben als

$$dB(t, T) = B(t, T)(r(t)dt - \beta(t, T)\sigma_r dZ^*(t)).$$

Bei einem Anfangswert von $B(0, T)$ ergibt sich

$$B(t, T) = B(0, T) \exp\left(\int_0^t r(s) ds - \frac{1}{2}\beta^2(t, T)\sigma_r^2 t - \beta(t, T)\sigma_r Z^*(t)\right).$$

Mit Hilfe dieser Darstellung lässt sich dann auch das Forwardmartingalmaß \mathbb{P}^T definieren durch

$$\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T)}{B(0, T)} \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist nach dem Satz von Girsanov der Prozess $Z^T(t) := Z^*(t) + \beta(t, T)\sigma_r t$ ein Wiener Prozess unter dem Forwardmartingalmaß. Außerdem erhält man durch die Definition $W_i^T := W_i^* + \rho_i \beta(t, T)\sigma_r t$ für $i = 1, 2$ zwei weitere \mathbb{P}^T -Wiener-Prozesse. Dadurch können nun sämtliche Dynamiken auch bezüglich des Maßes \mathbb{P}^T dargestellt

werden. Der Forwardpreis der i -ten Aktie lässt sich dann explizit angeben als

$$M_i(t) := \frac{S_i(t)}{B(t, T)} \exp(-\delta_i(T-t)) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } i = 1, 2.$$

Insbesondere gilt dabei natürlich $M_i(T) = S_i(T)$. Für $(M_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} & M_i(t) \\ &= \frac{s_i e^{-\delta_i T}}{B(0, T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_i^2 t + \frac{1}{2}\beta^2(t, T)\sigma_r^2 t + \sigma_i dW_i^*(t) + \beta(t, T)\sigma_r Z^*(t)\right) \\ &= M_i(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_i^2 t + \frac{1}{2}\beta^2(t, T)\sigma_r^2 t + \sigma_i dW_i^T(t) - \rho_i \sigma_i \beta(t, T)\sigma_r t \right. \\ &\quad \left. + \beta(t, T)\sigma_r Z^T(t) - \beta^2(t, T)\sigma_r^2 t\right) \\ &= M_i(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_i^2 t - \frac{1}{2}\beta^2(t, T)\sigma_r^2 t - \rho_i \sigma_i \beta(t, T)\sigma_r t + \sigma_i dW_i^T(t) + \beta(t, T)\sigma_i Z^T(t)\right). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten kann die Dynamik von $M_i(t)$ unter \mathbb{P}^T geschrieben werden als

$$dM_i(t) = M_i(t)(\sigma_i dW_i^T(t) + \beta(t, T)\sigma_r dZ^T(t)) \quad (61)$$

und $M_i(t)$ ist wie gewünscht ein Martingal unter dem Forwardmartingalmaß. Da nun die Forwardpreise definiert sind, kann genauer auf die Symmetrie von Carr eingegangen werden. Dazu soll wieder gezeigt werden, dass die regulär bedingte Verteilung von $\frac{M_2(\tau)M_1(T)}{M_1(\tau)M_2(T)}$ unter $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ gleich der regulär bedingten Verteilung von $\frac{M_1(\tau)M_2(T)}{M_2(\tau)M_1(T)}$ unter $\mathbb{P}_1^*(\tau)$ ist. Damit wäre Teil (i) von Proposition 3.3.1 erfüllt. Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_i^*(\tau)$ die regulär bedingte Verteilung unter \mathcal{F}_τ für eine Stoppzeit τ . Die Aktienmartingalmaße \mathbb{P}_1^* und \mathbb{P}_2^* lassen sich dann definieren durch

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*}{d\mathbb{P}^T} \Big|_{\mathcal{F}_\tau} := \frac{M_i(T)}{M_i(0)}.$$

Vergleicht man dies mit (55), so konnten dort die beiden Maße bereits auf gleiche Weise definiert werden. Dabei ist zu bemerken, dass in dem Fall die Maße \mathbb{P}^* und \mathbb{P}^T identisch waren. Nach dem Satz von Girsanov ergeben sich wieder Wiener-Prozesse bezüglich \mathbb{P}_1^* durch

$$\begin{aligned} Z^1(t) &:= W^T(t) - \beta(t, T)\sigma_r t - \rho_1 \sigma_1 t = Z^*(t) - \rho_1 \sigma_1 t \\ W_{11}^*(t) &:= W_1^T(t) - \rho_1 \beta(t, T)\sigma_r t - \sigma_1 t = W_1^*(t) - \sigma_1 t \\ W_{21}^*(t) &:= W_2^T(t) - \rho_2 \beta(t, T)\sigma_r t - \rho \sigma_1 t = W_1^*(t) - \rho \sigma_1 t. \end{aligned} \quad (62)$$

Dabei ist auf die Korrelation der Prozesse miteinander zu achten. Auf entsprechende Weise ergeben sich unter \mathbb{P}_2^* die Wiener-Prozesse

$$\begin{aligned} Z^2(t) &:= Z^T(t) - \beta(t, T)\sigma_r t - \rho_2\sigma_2 t = Z^*(t) - \rho_2\sigma_2 t \\ W_{12}^*(t) &:= W_2^T(t) - \rho_1\beta(t, T)\sigma_r t - \rho\sigma_2 t = W_2^*(t) - \rho\sigma_2 t \\ W_{22}^*(t) &:= W_2^T(t) - \rho_2\beta(t, T)\sigma_r t - \sigma_2 t = W_1^*(t) - \sigma_2 t. \end{aligned} \quad (63)$$

Sei eine Stoppzeit $\tau \in [0, T]$ gegeben. Die Idee zum Nachweis der Behauptung aus Satz 3.3.1 (i) besteht erneut darin, zu zeigen, dass $\frac{M_2(\tau)M_1(T)}{M_1(\tau)M_2(T)}$ unter $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ die gleiche stochastische Differentialgleichung erfüllt wie $\frac{M_1(\tau)M_2(T)}{M_2(\tau)M_1(T)}$ unter $\mathbb{P}_1^*(\tau)$. Dazu wird das stochastische Differential von $\frac{M_2(\tau)M_1(T)}{M_1(\tau)M_2(T)}$ unter \mathbb{P}_τ^T bestimmt. Nutzt man dazu (61), so liefert die Itô-Formel

$$\begin{aligned} & d \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} \\ &= \frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)M_2(t)} dM_1(t) - \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2^2(t)} dM_2(t) \\ &\quad - \frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)M_2^2(t)} d\langle M_1, M_2 \rangle_t + \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2^3(t)} d\langle M_2 \rangle_t \\ &= \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\beta(t, T)\sigma_r dZ^T(t) + \sigma_1 dW_1^T(t)) \\ &\quad - \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\beta(t, T)\sigma_r dZ^T(t) + \sigma_2 dW_2^T(t)) \\ &\quad - \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\beta^2(t, T)\sigma_r^2 dt + \rho_2\sigma_2\beta(t, T)\sigma_r dt + \rho_1\sigma_1\beta(t, T)\sigma_r dt + \rho\sigma_1\sigma_2 dt) \\ &\quad + \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\beta^2(t, T)\sigma_r^2 dt + 2\rho_2\sigma_2\beta(t, T)\sigma_r dt + \sigma_2^2 dt) \\ &= \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\sigma_1 dW_1^T(t) - \sigma_2 dW_2^T(t) \\ &\quad + \rho_2\sigma_2\beta(t, T)\sigma_r dt - \rho_1\sigma_1\beta(t, T)\sigma_r dt - \rho\sigma_1\sigma_2 dt + \sigma_2^2 dt). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der in (63) definierten Wiener-Prozesse ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} d \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} &= \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\sigma_1 dW_{12}^*(t) + \rho_1\sigma_1\beta\sigma_r dt + \rho\sigma_1\sigma_2 dt - \sigma_2 dW_{22}^*(t) \\ &\quad - \rho_2\sigma_2\beta\sigma_r dt - \sigma_2^2 dt + \rho_2\sigma_2\beta\sigma_r dt - \rho_1\sigma_1\beta\sigma_r dt - \rho\sigma_1\sigma_2 dt + \sigma_2^2 dt) \\ &= \frac{M_2(\tau)M_1(t)}{M_1(\tau)M_2(t)} (\sigma_1 dW_{12}^*(t) - \sigma_2 dW_{22}^*(t)). \end{aligned} \quad (64)$$

Durch Vertauschen der Indizes erhält man entsprechend auch die Dynamik von $\frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)}$ unter \mathbb{P}_τ^T als

$$\begin{aligned} d \frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} &= \frac{M_1(\tau)M_1(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} (\sigma_2 dW_2^T(t) - \sigma_1 dW_1^T(t) + \rho_1 \sigma_1 \beta \sigma_r dt - \rho_2 \sigma_2 \beta \sigma_r dt \\ &\quad - \rho \sigma_1 \sigma_2 dt + \sigma_1^2 dt). \end{aligned}$$

Hier können die Wiener-Prozesse aus (62) genutzt werden, sodass sich

$$\begin{aligned} d \frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} &= \frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} (\sigma_2 dW_{21}^*(t) + \rho_2 \sigma_2 \beta \sigma_r dt + \rho \sigma_1 \sigma_2 dt - \sigma_1 dW_{11}^*(t) \\ &\quad - \rho_1 \sigma_1 \beta \sigma_r dt - \sigma_1^2 dt + \rho_1 \sigma_1 \beta \sigma_r dt - \rho_2 \sigma_2 \beta \sigma_r dt - \rho \sigma_1 \sigma_2 dt + \sigma_1^2 dt) \\ &= \frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} (\sigma_2 dW_{21}^*(t) - \sigma_1 dW_{11}^*(t)) \end{aligned}$$

ergibt. Setzt man dann

$$\tilde{W}_{21}(t) := -W_{21}^*(t) \text{ und } \tilde{W}_{11}(t) := -W_{11}^*(t),$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$d \frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} = \frac{M_1(\tau)M_2(t)}{M_2(\tau)M_1(t)} (\sigma_1 d\tilde{W}_{11}(t) - \sigma_2 d\tilde{W}_{21}(t)). \quad (65)$$

Der Vergleich von (64) und (65) zeigt nun, dass beide Prozesse bezüglich der jeweiligen Maße dieselbe stochastische Differentialgleichung erfüllen. Dadurch ist die Symmetrie von Carr nach Proposition 3.3.1 ebenfalls im Vasicek-Modell gültig.

3.3.2 Ein hinreichendes Kriterium für die Symmetrie

Abschließend soll in diesem Abschnitt noch ein hinreichendes Kriterium erarbeitet werden, mit dem die Gültigkeit der SC_τ für das vollständige Finanzmarktmodell aus Kapitel 3.3 nachgewiesen werden kann. Auch hier orientieren sich die Ausführungen wieder an [14]. Sei τ im Folgenden eine Stoppzeit mit $\tau \leq t \leq T$ und bezeichne mit \mathbb{P}_τ^* wieder die regulär bedingte Verteilung gegeben \mathbb{F}_τ . Bei einem Anfangswert $S_i(\tau)$ sind die Aktienpreisprozesse gegeben durch

$$S_i(t) = S_i(\tau) \exp \left(\int_\tau^t r(s) - \delta_i(s) ds + \int_\tau^t \sigma_i dW_i^*(s) - \frac{1}{2} \int_\tau^t \sigma_i^2 ds \right). \quad (66)$$

Die Funktion σ_i ist dabei ein eindimensionaler, previsible Prozess mit $\int_\tau^T \sigma_i^2 ds < \infty$. Sie beschreibt erneut die lokale Volatilität der i -ten Aktie. Hier sei angemerkt, dass

die Argumente, von denen der Funktionswert von σ_i abhängt, zunächst vernachlässigt werden. Erst zu einem späteren Zeitpunkt wird sich dann zeigen, dass die Gültigkeit der SC_τ für eine Stoppzeit $\tau \leq t \leq T$ genau von diesen Argumenten abhängt, sodass dann genauer darauf eingegangen wird. Die Forwardpreise der beiden Aktien lassen sich hier wieder definieren durch

$$M_i(t) := \frac{S_i(t)}{B(t, T)} \exp\left(-\int_t^T \delta_i(s) ds\right) \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } 0 \leq t \leq T.$$

Auch der Maßwechsel zum Forwardmartingalmaß kann hier wieder angegeben werden durch

$$\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T)}{B(0, T)} \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) = \exp\left(\int_0^t \sigma_B(s, T) dZ^*(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_B(s, T)^2 ds\right)$$

für $0 \leq t \leq T$. Es wurde bereits gezeigt, dass $(M_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ unter \mathbb{P}^T die Dynamik

$$dM_i(t) = M_i(t)(\sigma_i dW_i^T(t) - \sigma_B dZ^T(t)) \quad (67)$$

besitzt. Um eine Aussage über die Gültigkeit der SC_τ machen zu können soll die Bedingung aus Proposition 3.3.1 (i) genutzt werden. Das heißt, die in dieser Proposition genannten regulär bedingten Verteilungen müssen genauer bestimmt werden. Im ersten Schritt wird dazu die Dynamik von $\left(\frac{M_1(t)}{M_2(t)}\right)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich \mathbb{P}_τ^T berechnet. Aus (67) folgt mit Hilfe der Itô-Formel

$$\begin{aligned} d\frac{M_1(t)}{M_2(t)} &= \frac{1}{M_2(t)} dM_1(t) - \frac{M_1(t)}{M_2^2(t)} dM_2(t) - \frac{1}{M_2^2(t)} d\langle M_1, M_2 \rangle_t + \frac{M_1(t)}{M_2^3(t)} d\langle M_2 \rangle_t \\ &= \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \left(\sigma_1 dW_1^T(t) - \sigma_2 dW_2^T(t) - \sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt + \sigma_2^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt - \sigma_2 \sigma_B \rho(t) dt \right). \end{aligned} \quad (68)$$

Der Prozess $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ soll durch

$$X_t := \ln\left(\frac{M_1(t)M_2(\tau)}{M_2(t)M_1(\tau)}\right) \quad (69)$$

definiert werden. Dann ist die Aussage aus Proposition 3.3.1 (i) äquivalent dazu, dass die regulär bedingte Verteilung von $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ gegeben \mathcal{F}_τ unter \mathbb{P}_2^* gleich der regulär bedingten Verteilung von $(-X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ gegeben \mathcal{F}_τ unter \mathbb{P}_1^* ist. Die Dynamik von

$(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich \mathbb{P}_τ^T lässt sich mit Hilfe der Itô-Formel und (68) herleiten durch

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{M_2(t)M_1(\tau)}{M_1(t)M_2(\tau)} \cdot \frac{M_2(\tau)}{M_1(\tau)} d\frac{M_1(t)}{M_2(t)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2^2(t)}{M_1^2(t)} d\left\langle \frac{M_1}{M_2} \right\rangle_t \\ &= \frac{M_2(t)}{M_1(t)} \cdot \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \left(\sigma_1 dW_1^T(t) - \sigma_2 dW_2^T(t) - \sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt + \sigma_2^2 dt + \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \sigma_2 \sigma_B \rho_2(t) dt \right) - \frac{1}{2} \frac{M_2^2(t)}{M_1^2(t)} \cdot \frac{M_1^2(t)}{M_2^2(t)} \left(\sigma_1^2 dt - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt + \sigma_2^2 dt \right) \\ &= \sigma_1 dW_1^T(t) - \sigma_2 dW_2^T(t) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 dt + \frac{1}{2} \sigma_2^2 dt + \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt - \sigma_2 \sigma_B \rho_2(t) dt. \end{aligned}$$

Bezeichne im Folgenden $\mathbb{P}_i^*(\tau)$ die regulär bedingte Verteilung gegeben \mathcal{F}_τ . Genauer lässt sich das Maß $\mathbb{P}_i^*(\tau)$ wieder definieren durch

$$\frac{d\mathbb{P}_i^*(\tau)}{d\mathbb{P}_\tau^T} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{M_i(t)}{M_i(\tau)}.$$

Berücksichtigt man die Korrelationen, so lassen sich unter $\mathbb{P}_i^*(\tau)$ nach dem Satz von Girsanov die Wiener-Prozesse

$$\begin{aligned} W_{ii}^*(t) &:= W_i^T(t) + \int_\tau^t \rho_i(s) \sigma_B ds - \int_\tau^t \sigma_i ds \\ \text{und } W_{ji}^*(t) &:= W_j^T(t) + \int_\tau^t \rho_i(s) \sigma_B ds - \int_\tau^t \sigma_i \rho(s) ds \end{aligned}$$

für $i, j = 1, 2$ definieren. Unter Verwendung dieser Wiener-Prozesse kann dann die Dynamik von $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ ausgedrückt werden.

Es gilt

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma_1 dW_1^T(t) - \sigma_2 dW_2^T(t) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 dt + \frac{1}{2} \sigma_2^2 dt + \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt - \sigma_2 \sigma_B \rho_2(t) dt \\ &= \sigma_1 dW_{12}^*(t) + \sigma_1 \sigma_2 dt - \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt - \sigma_2 dW_{22}^*(t) - \sigma_2^2 \rho(t) dt + \sigma_2 \sigma_B \rho_2(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma_1^2 dt + \frac{1}{2} \sigma_2^2 dt + \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt - \sigma_2 \sigma_B \rho_2(t) dt \\ &= \sigma_1 dW_{12}^*(t) - \sigma_2 dW_{22}^*(t) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 dt + \sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt - \frac{1}{2} \sigma_2^2 dt. \end{aligned} \tag{70}$$

Entsprechend lässt sich auch die Dynamik von $(-X)_{\tau \leq t \leq T}$ mit Hilfe von Wiener-

Prozessen bezüglich $\mathbb{P}_1^*(\tau)$ ausdrücken als

$$\begin{aligned}
 d(-X_t) = -dX_t &= -\sigma_1 dW_1^T(t) + \sigma_2 dW_2^T(t) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt - \frac{1}{2}\sigma_2^2 dt \\
 &\quad - \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt + \sigma_2 \sigma_B \rho(t) dt \\
 &= -\sigma_1 dW_{11}^*(t) + \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt - \sigma_1^2 \rho(t) dt \\
 &\quad + \sigma_2 dW_{21}^*(t) - \sigma_2 \sigma_B \rho_2(t) dt + \sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt - \frac{1}{2}\sigma_2^2 dt - \sigma_1 \sigma_B \rho_1(t) dt + \sigma_2 \sigma_B \rho(t) dt \\
 &= -\sigma_1 dW_{11}^*(t) + \sigma_2 dW_{21}^*(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt + \sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt - \frac{1}{2}\sigma_2^2 dt. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Definiert man

$$\bar{W}_{11}^*(t) := -W_{11}^*(t) \text{ und } \bar{W}_{21}^*(t) := -W_{21}^*(t),$$

so sind dies ebenfalls $\mathbb{P}_1^*(\tau)$ -Wiener-Prozesse und es folgt mit (71)

$$d(-X_t) = \sigma_1 d\bar{W}_{11}^*(t) - \sigma_2 d\bar{W}_{21}^*(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt + \sigma_1 \sigma_2 \rho(t) dt - \frac{1}{2}\sigma_2^2 dt. \quad (72)$$

Vergleicht man (70) mit (72), so fällt auf, dass unter gewissen Bedingungen an die lokalen Volatilitätsfunktionen $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ dieselbe stochastische Differentialgleichung erfüllt, wie $(-X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich $\mathbb{P}_1^*(\tau)$. An dieser Stelle kann nun gezielt auf die Argumente, von denen die Werte der Volatilitätsfunktionen σ_1 und σ_2 abhängig sind, eingegangen werden. Der nachstehende Satz soll dabei das Ergebnis festhalten.

Satz 3.3.2. (*Hinreichendes Kriterium zur Gültigkeit der SC_τ*)

Gegeben sei das vollständige Finanzmarktmodell aus Kapitel 3.3. Die lokalen Volatilitätsfunktionen $\sigma_1\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}, t\right), \sigma_2\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}, t\right)$ seien in dem Modell als abhängig vom Quotienten der Aktienpreise und von der Zeit vorausgesetzt, d. h. $\sigma_i : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Es wird angenommen, dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 dX_t &= \bar{\sigma}_1(X_t, t) dW_1(t) - \bar{\sigma}_2(X_t, t) dW_2(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1^2(X_t, t) dt + \bar{\sigma}_1(X_t, t) \bar{\sigma}_2(X_t, t) \rho(t) dt - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2^2(X_t, t) dt \quad (73)
 \end{aligned}$$

schwach eindeutig ist für $\tau \leq t \leq T$ mit $\bar{\sigma}_i(X_t, t) := \sigma_i\left(\frac{S_1(t)}{S_2(t)}, t\right)$, wobei der Prozess $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ definiert ist wie in (69). Erfüllen die Volatilitätsfunktionen die Bedingung

$$\bar{\sigma}_i(X_t, t) = \bar{\sigma}_i(-X_t, t), \text{ für } i = 1, 2, \quad (74)$$

so gilt die SC_τ .

Beweis: Der wesentliche Teil dieses Beweises liegt bereits vor. Seien die Volatilitätsfunktionen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ gerade in X_t , d. h., (74) sei erfüllt. In diesem Fall erfüllt $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ die gleiche stochastische Differentialgleichung wie $(-X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ bezüglich $\mathbb{P}_1^*(\tau)$. Dies sieht man, wie bereits erwähnt, beim Vergleichen von (70) und (72). Da die stochastische Differentialgleichung (73) als schwach eindeutig vorausgesetzt ist, muss die regulär bedingte Verteilung von X_t gegeben \mathcal{F}_t bezüglich \mathbb{P}_2^* mit der regulär bedingten Verteilung von $-X_t$ gegeben \mathcal{F}_t bezüglich \mathbb{P}_1^* übereinstimmen. Aufgrund der Definition von $(X_t)_{\tau \leq t \leq T}$ ist diese Aussage äquivalent zur Aussage aus Proposition 3.3.1 (i). Dadurch gilt die SC_τ in diesem Modell. \square

An dieser Stelle sollen noch einige Anmerkungen über die Gültigkeit der Symmetrie von Exchange-Optionen gemacht werden. Soll im Modell die Volatilität der Aktienpreise lokal von den Aktienpreisen selbst abhängen, so werden im vorherigen Satz sehr einschränkende Bedingungen an diese Abhängigkeit gestellt, damit die SC_τ in dem Finanzmarktmodell gilt. Diese Einschränkungen sind notwendig, da die Symmetrie im allgemeinen vollständigen Marktmodell nicht immer gilt. Um dies herauszustellen kann beispielsweise ein Modell betrachtet werden, in dem die Volatilität der i -ten Aktie nur vom Preis der i -ten Aktie selbst, nicht aber vom Quotienten beider Preise abhängt. Genauer seien also die beiden Volatilitäten von der Form $\sigma_i := \sigma_i(S_i(t)) := \bar{\sigma}_i(M_i(t))$ für $i = 1, 2$. Die Symmetrie kann im Allgemeinen in solchen Modellen nicht gelten, da die Forwardpreise $(M_i(t))_{\tau \leq t \leq T}$ der Aktien bezüglich der Maße $\mathbb{P}_1^*(\tau)$ und $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ unterschiedliche Verteilungen besitzen. Konkret bedeutet dies, dass zum Beispiel der Forwardpreis der ersten Aktie bezüglich $\mathbb{P}_1^*(\tau)$ die Dynamik

$$dM_1(t) = M_1(t)(\bar{\sigma}_1(M_1(t))dW_{11}^*(t) + \bar{\sigma}_1^2(M_1(t))dt)$$

aufweist. Beschreibt man aber andererseits die Dynamik unter Verwendung von $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ -Wiener-Prozessen, so gilt

$$dM_1(t) = M_1(t)(\bar{\sigma}_1(M_1(t))dW_{12}^*(t) + \bar{\sigma}_1(M_1(t))\bar{\sigma}_2(M_2(t))\rho(t)dt).$$

Aus diesem Grund stimmt dann allgemein die Verteilung von X_t unter $\mathbb{P}_2^*(\tau)$ auch nicht mit der Verteilung von $-X_t$ unter $\mathbb{P}_1^*(\tau)$ überein. Eine bedeutende Folgerung aus dem vorherigen Satz ist, dass die Symmetrie von Carr in vollständigen Modellen mit deterministischen, zeitabhängigen Koeffizienten gilt. Das deterministische Modell stellt einen Spezialfall der im Satz 3.3.2 betrachteten Situation dar, da die Volatilität hier unabhängig von den Aktienpreisen ist. Insbesondere folgt damit natürlich auch die

bereits gezeigte Anwendbarkeit der Symmetrie von Carr im Black-Scholes-Modell und im Vasicek-Modell.

3.4 Barriere-Optionen

In diesem Abschnitt soll erarbeitet werden, inwiefern sich die Symmetrie für Exchange-Optionen zur Bewertung und zum Hedgen von Barriere-Optionen eignet. Die folgenden Ausführungen und Beispiele aus dem gesamten Abschnitt stammen dabei aus Kapitel 3 von [14] und wurden entsprechend für den zweidimensionalen Fall abgeändert. Ziel ist es hier, eine mögliche Anwendung der in den vorherigen Abschnitten erarbeiteten Symmetrie von Carr zu zeigen. Barriere-Optionen lassen sich den exotischen Optionen zuordnen und werden somit hauptsächlich außerbörslich gehandelt. Genauer gesagt, zählen Barriere-Optionen zu den pfadabhängigen Optionen, d. h., dass die Auszahlung der Option nicht nur vom Aktienkurs zur Maturität abhängt, sondern von seinen historischen Werten. Dadurch geht die Markoveigenschaft der Auszahlungsfunktion verloren. Die Abhängigkeit der Auszahlung vom gesamten Aktienkursverlauf bis zur Maturität kann die Bewertung einer solchen Option deutlich erschweren. Die Pfadabhängigkeit bei Barriere-Optionen besteht darin, dass für die Auszahlung von Bedeutung ist, ob der Aktienkurs während der Laufzeit eine gewisse Schwelle über- oder unterschreitet. Unterschieden wird dabei zwischen sogenannten Knock-In- und Knock-Out-Optionen. Eine Knock-In-Option liefert keine Auszahlung und ist somit wertlos, falls der Aktienkurs des Underlyings die besagte Schwelle innerhalb der Laufzeit nicht erreicht. Im Gegensatz dazu liefert eine Knock-Out-Option keine Auszahlung, sobald die Schwelle über- oder unterschritten wird. Dadurch lässt sich die Auszahlungsfunktion einer Barriere-Option zusammensetzen aus der Auszahlungsfunktion G einer ursprünglichen barrierefreien Option und einer Indikatorfunktion eines Ereignisses A , welches die Auszahlungsänderung bei Erreichen der Barriere widerspiegelt. Die Auszahlungsfunktion eines Down-And-Out-Calls auf eine Aktie $S := (S(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit Strike K , Maturität T und Barriere $H < K$ ist, z. B., gegeben durch $(S(T) - K)^+ \mathbf{1}_A$, wobei A in diesem Fall das Ereignis $\{S(t) > H \text{ für alle } 0 \leq t \leq T\}$ darstellt. Üblicherweise wird bei Over-The-Counter Geschäften mit Barriere-Optionen auf Call- oder Put-Optionen gehandelt. Möchte ein Anleger beispielsweise auf einen Kursanstieg eines bestimmten Underlyings setzen, so kann eine Barriere-Option gegenüber Plain-Vanilla-Optionen gewisse Vorteile bieten. Bei einem zu erwartenden Kursanstieg hat ein Down-And-Out-Call den Vorteil, dass er günstiger zu erwerben ist als ein Plain-Vanilla-Call auf dasselbe Underlying. Wird die Barriere innerhalb der Laufzeit nicht unterschritten, liefern beide Optionen dieselbe Auszahlung, wodurch der Call mit Barriere eine höhere Rendite besitzt. Auf der anderen Seite ist das Handeln mit der Knock-Out-Barriere-Option immer mit dem

Risiko verbunden, dass die Barriere erreicht wird und die Investition somit keine Auszahlung liefert. Das Prinzip der Barriere-Optionen soll in diesem Kapitel nun auch auf bestimmte Optionen ausgeweitet werden, deren Auszahlung von zwei Aktienpreisen abhängig ist. Dabei soll der Fokus insbesondere wieder auf der europäischen Exchange-Option liegen. Um später die Symmetrie von Carr zum Hedgen nutzen zu können, sollten an dieser Stelle einige Einschränkungen vorgenommen werden. Als Erstes wird im Folgenden angenommen, dass die SC_τ für Stoppzeiten $0 \leq \tau \leq T$ gilt, damit die Symmetrie überhaupt angewandt werden kann. Weiter bezeichne $G = G(x, y)$ in diesem Kapitel stets eine nicht-negative Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit von zwei Variablen. Außerdem wird gefordert, dass G positiv-homogen vom Grad 1 in beiden Variablen ist, damit Bedingung (ii) aus Proposition 3.3.1 gilt. Vorerst ist aber noch zu klären, welche Barriereereignisse in diesem zweidimensionalen Fall betrachtet werden sollten. Dieses Problem ergibt sich, da die Barrieren für gewöhnlich nur von einem Underlying abhängen, jedoch in diesem Fall zwei Aktienpreise zugrunde liegen. Durch die Beobachtungen aus den vorherigen Kapiteln ist bekannt, dass der Wert der Exchange-Option in starkem Zusammenhang mit dem Quotienten der beiden Aktienpreise steht. Aus diesem Grund scheint die Betrachtung von Barrieren sinnvoll, die ebenfalls vom Wert des Quotienten der Aktienpreise abhängen. Genauer werden im Folgenden nur Barrieren betrachtet die vom Quotienten der Forwardpreise $\frac{M_1(t)}{M_2(t)}$ abhängen. Hier wird sich zeigen, dass bei Optionen mit Barrieren von dieser Form die Symmetrie von Carr zum Hedgen verwendet werden kann. Anhand eines Beispiels soll nun erläutert werden, inwiefern die Symmetrie von Carr genutzt werden kann um eine Exchange-Option mit Barriere zu replizieren. Am einfachsten lässt sich die Idee einer solchen Hedgingstrategie am Beispiel von Down-And-In-Optionen erkennen. Betrachte dazu eine Knock-In-Exchange-Option auf die Underlyings M_1 und M_2 , welche erst aktiviert wird, falls der Prozess $\frac{M_1(t)}{M_2(t)}$ eine Barriere H mit $H \leq 1$ und $H < \frac{M_1(0)}{M_2(0)}$ unterschreitet. Die Laufzeit der Option sei T . Setzt man $\inf \emptyset = \infty$, so lässt sich für diesen Claim der Zeitpunkt τ_H definieren, in dem die Barriere zum ersten Mal unterschritten wird, durch

$$\tau_H := \inf \{0 \leq t \leq T : \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \leq H\}.$$

Dabei ist zu beachten, dass $\frac{M_1(t)}{M_2(t)} = \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp\left(\int_t^T \delta_2(s) - \delta_1(s) ds\right)$. Lässt man die Barriere vom Quotienten der Forwardpreise abhängen, so handelt es sich genauer betrachtet um eine Barriere, die sich im Laufe der Zeit verschiebt. In dividendenfreien Modellen gilt jedoch, wie bereits bemerkt, $\frac{M_1(t)}{M_2(t)} = \frac{S_1(t)}{S_2(t)}$, sodass in diesen Fällen die Barriere als konstant angesehen werden kann. Die Auszahlungsfunktion der Down-And-In-Exchange-Option ist dann gegeben durch $(M_1(T) - M_2(T))^+ \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq T\}}$. Um die Option

hedgen zu können, wird eine Handelsstrategie mit einem Anfangsportfolio gesucht, welches im Zeitpunkt τ_H kostenfrei gegen eine gewöhnliche Exchange-Option mit gleicher Maturität eingetauscht werden kann. Dies soll aber nur der Fall sein, falls $\tau_H \leq T$. Ansonsten soll das Portfolio zum Laufzeitende wertlos verfallen. Findet sich ein solches Portfolio, so ließe sich der Knock-In-Claim mit dieser Strategie replizieren. Der Wert entspräche dann genau dem Anfangspreis des Hedges. Ist $\tau_H \leq T$, so gilt im Zeitpunkt τ_H nach Voraussetzung die SC_{τ_H} . Es folgt

$$\mathbb{E}^*[(M_1(T) - M_2(T))^+ | \mathcal{F}_{\tau_H}] = \frac{M_2(\tau_H)}{M_1(\tau_H)} \mathbb{E}^* \left[\left(\frac{M_1^2(\tau_H)}{M_2^2(\tau_H)} M_2(T) - M_1(T) \right)^+ | \mathcal{F}_{\tau_H} \right].$$

Da die Pfade der Forwardpreisprozesse als rechtsseitig stetig vorausgesetzt waren, gilt $\frac{M_1(\tau_H)}{M_2(\tau_H)} = H$. Als Strategie zur Replikation der Knock-In-Option ergibt sich nun folgende Möglichkeit:

Im Zeitpunkt $t = 0$ kauft man $\frac{1}{H}$ Exchange-Optionen mit Laufzeit T , die jeweils eine Auszahlung von $(H^2 M_2(T) - M_1(T))^+$ haben. Nun gibt es zwei Ereignisse, die eintreffen könnten.

1. *Fall* : Die Barriere wird innerhalb der Laufzeit unterschritten ($\tau_H \leq T$) :

In diesem Fall wird das Anfangsportfolio im Zeitpunkt τ_H gegen eine gewöhnliche Exchange-Option mit Auszahlung $(M_1(T) - M_2(T))^+$ getauscht. Dies ist aufgrund der SC_{τ_H} kostenfrei möglich. Zu jedem anderen Zeitpunkt bleibt das Portfolio in seiner Zusammensetzung unverändert.

2. *Fall* : Die Barriere wird innerhalb der Laufzeit nicht unterschritten ($\tau_H > T$) :

In diesem Fall wird das Anfangsportfolio über die gesamte Laufzeit hinweg unverändert gehalten. Nach dieser Voraussetzung gilt dann $H < \frac{M_1(T)}{M_2(T)}$ und $H \leq 1$. Dadurch gilt für die Auszahlung im Zeitpunkt T

$$\frac{1}{H} (H^2 M_2(T) - M_1(T))^+ \leq \frac{1}{H} (H M_1(T) - M_1(T))^+ \leq \frac{1}{H} (M_1(T) - M_1(T))^+ = 0.$$

Die Auszahlung der Exchange-Option mit Down-And-In-Barriere lässt sich also replizieren und der Wert dieses Claims in $t = 0$ entspricht dann genau dem Preis des Hedgeportfolios. Das Besondere an diesem Hedge ist, dass die Portfoliozusammensetzung innerhalb der Laufzeit höchstens einmal verändert wird und dadurch Transaktionen eingespart werden. Einen solchen Hedge bezeichnet man als semistatisch. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass in diesem Beispiel einige wichtige Voraussetzungen erfüllt sein mussten, damit der Hedge funktioniert. Offensichtlich sind einerseits die Gültigkeit der SC_{τ_H} und die rechtsseitige Stetigkeit der Pfade von großer Relevanz. Andererseits ist die Voraussetzung $H \leq 1$ bedeutsam. Lässt man auch Barrieren $1 < H < \frac{M_1(T)}{M_2(T)}$ zu, so kann das Portfolio im Fall $\tau_H < T$ noch einen positiven Restwert behalten und man hat

nur eine Superreplikation des Claims gefunden. Außerdem müssen die für den Hedge notwendigen Claims auf dem Markt verfügbar sein. Der nächste Satz soll die Strategie zum Hedgen von Knock-In-Claims auf zwei Underlyings allgemeiner formulieren. Hier werden nun auch Barrieren $H > 1$ zugelassen.

Satz 3.4.1. (*Hedgen von Knock-In-Claims*)

Seien $M_1 := (M_1(t))_{0 \leq t \leq T}$ und $M_2 := (M_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ positive Martingale bezüglich \mathbb{P}^* . Weiter sei $G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}$ die Auszahlung eines europäischen Claims mit Laufzeit T . Dabei ist $\tau_H := \inf\{0 \leq t \leq T : \eta \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \geq \eta H\}$ mit $\inf \emptyset = \infty$ für ein $0 < H \neq \frac{M_1(0)}{M_2(0)}$ und $\eta := \text{sgn}(H - \frac{M_1(0)}{M_2(0)})$. Für den Fall $\tau_H \leq T$ gelte $\frac{M_1(\tau_H)}{M_2(\tau_H)} = H$. Die Funktion G sei nichtnegativ und positiv homogen vom Grad 1 mit $\mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))] < \infty$. Gilt nun die $SC_{\tau_H \wedge T}$, so ist der Wert des Claims gegeben durch

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\tau_H \leq T\}}] \\ &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] - \frac{1}{H} \mathbb{E}^*[G(H^2 M_2(T), M_1(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}]. \end{aligned}$$

Dieser Satz soll im Folgenden bewiesen werden, indem eine Möglichkeit erläutert wird, den Claim durch eine semistatische Strategie zu replizieren. Dabei wird angenommen, dass die für die Replikation notwendigen Claims ebenfalls auf dem Finanzmarkt handelbar sind.

Beweis: Im Zeitpunkt 0 wird ein Claim $F := F(M_1(T), M_2(T))$ mit der Auszahlung

$$G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}} + \frac{1}{H} G(H^2 M_2(T), M_1(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}$$

gekauft. Falls $\tau_H \leq T$, so soll F in τ_H kostenfrei gegen den Claim mit Auszahlung $G(M_1(T), M_2(T))$ eingetauscht werden können. Für den Fall $\tau_H > T$ soll F im Zeitpunkt T wertlos verfallen. Bis auf den möglichen Tausch, falls die Barriere vor T erreicht wird, soll das Portfolio unverändert gehalten werden. Der Claim F muss demnach die folgenden beiden Eigenschaften erfüllen:

- (i) $\mathbb{E}^*[F(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H}] = \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H}]$, falls $\tau_H \leq T$.
- (ii) $F(M_1(T), M_2(T)) = 0$, falls $\tau_H > T$.

Zu (i) : Diese Eigenschaft muss gelten, da die Claims in τ_H kostenfrei getauscht werden

sollen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H}] \\
 &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H} \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] + \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} < \eta H\}} | \mathcal{F}_{\tau_H}] \\
 &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H} \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] + \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} < \eta H\}} | \mathcal{F}_{\tau_H \wedge T}] \\
 &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H} \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] \\
 &\quad + \mathbb{E}^*\left[\frac{M_2(\tau_H \wedge T)}{M_1(\tau_H \wedge T)} G\left(\frac{M_1^2(\tau_H \wedge T)}{M_2^2(\tau_H \wedge T)} M_2(T), M_1(T)\right) \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1^2(\tau_H \wedge T) M_2(T)}{M_2^2(\tau_H \wedge T) M_1(T)} < \eta H\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_H \wedge T}\right] \\
 &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H} \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] \\
 &\quad + \mathbb{E}^*\left[\frac{M_2(\tau_H)}{M_1(\tau_H)} G\left(\frac{M_1^2(\tau_H)}{M_2^2(\tau_H)} M_2(T), M_1(T)\right) \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1^2(\tau_H) M_2(T)}{M_2^2(\tau_H) M_1(T)} < \eta H\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_H}\right] \\
 &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H} \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] \\
 &\quad + \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{H} G(H^2 M_2(T), M_1(T)) \mathbb{1}_{\{\eta \frac{H^2 M_2(T)}{M_1(T)} < \eta H\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_H}\right] \\
 &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H} \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] + \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{H} G(H^2 M_2(T), M_1(T)) \mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_H}\right] \\
 &= \mathbb{E}^*[F(M_1(T), M_2(T)) | \mathcal{F}_{\tau_H}],
 \end{aligned}$$

falls $\tau_H \leq T$. Bei der dritten Umformung wurde hier angewandt, dass die $SC_{\tau_H \wedge T}$ nach Voraussetzung gilt. Damit ist (i) erfüllt.

Zu (ii) : F muss diese Eigenschaft erfüllen, da der Knock-In Claim ebenfalls wertlos ist, falls die Barriere innerhalb der Laufzeit nicht erreicht ist. Falls $\tau_H > T$, so folgt für alle $t \in [0, T]$, dass $\eta \frac{M_1(t)}{M_2(t)} < \eta H$. Dies gilt insbesondere für den Zeitpunkt T selbst. Ebenso gilt $F(M_1(T), M_2(T)) = 0$, da die Indikatorfunktionen in der Definition von F den Wert 0 annehmen. Dadurch ist ebenfalls erfüllt (ii) und die Behauptung gezeigt. \square

Durch dieses Ergebnis erhält man automatisch auch eine Bewertung und eine Hedgingstrategie für Knock-Out-Optionen. Dies ist der Fall, da eine Knock-In- und eine Knock-Out-Option mit gleicher Barriere zusammen immer die gleiche Auszahlung liefern wie dieselbe barrierefreie Option. Die folgende Bemerkung gibt das konkrete Ergebnis an.

Bemerkung. (*Hedgen von Knock-Out-Claims*)

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Satz 3.4.1 ergibt sich der Wert einer

europäischen Option mit Auszahlung $G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\tau_H < T\}}$ als

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\tau_H < T\}}] \\ &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} < \eta H\}}] - \frac{1}{H} \mathbb{E}^*[G(H^2 M_2(T), M_1(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}]. \end{aligned}$$

Beweis: Für den Hedge kauft man eine barrierefreie Option mit der Auszahlung $G(M_1(T), M_2(T))$ und verkauft eine Knock-In-Option mit der Barriere H . Sollte die Barriere dann erreicht werden, so haben long und short Position zusammen den Wert 0 und das Portfolio wird verkauft. Genauer gesagt, gilt mit Hilfe der Aussage über den Wert der Knock-In-Option aus Satz 3.4.1 die Gleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\tau_H < T\}}] \\ &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))] - \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\tau_H \geq T\}}] \\ &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))] - \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] \\ & \quad - \frac{1}{H} \mathbb{E}^*[G(H^2 M_2(T), M_1(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}] \\ &= \mathbb{E}^*[G(M_1(T), M_2(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} < \eta H\}}] - \frac{1}{H} \mathbb{E}^*[G(H^2 M_2(T), M_1(T))\mathbb{1}_{\{\eta \frac{M_1(T)}{M_2(T)} \geq \eta H\}}]. \end{aligned}$$

□

Fazit

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde das zweidimensionale Wiener-Prozess getriebene Semimartingalmodell eingeführt. Das Ziel bestand darin, Bewertungsansätze für die europäische Exchange-Option in diesem Modell zu finden. Dabei sollte insbesondere untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen explizite Preisformeln für die Option existieren. Nachdem ein Bewertungsansatz für die Option im allgemeinen Semimartingalmodell vorgestellt wurde, wurde aufgezeigt, dass die Existenz einer geschlossenen Formel mit der Form der Volatilitäten der beiden betroffenen Aktien zusammenhängt. Dieses Ergebnis resultierte daraus, dass der Optionspreis unabhängig von der Zinsrate des Geldmarktkontos ist. Im Black-Scholes-Modell und in Modellen mit deterministischer Volatilität konnte gezeigt werden, dass eine geschlossene Preisformel der europäischen Exchange-Option angegeben werden kann. Des Weiteren wurde ein Bewertungsansatz in einem Diffusionsmodell vorgestellt. Weiterhin wurde am Beispiel des CEV-Modells gezeigt, dass auch bei lokaler stochastischer Volatilität eine explizite Preisformel existieren kann. Im Allgemeinen sind diese Formeln aber nicht immer einfach herzuleiten, und es bleibt unklar, ob sich direkt von der Form der Volatilitäten auf die Existenz einer Preisformel schließen lässt. Hierzu konnten nur hinreichende Kriterien erarbeitet werden. An dieser Stelle könnte weiter untersucht werden, welche Forderungen an die Volatilität notwendig sind, damit eine geschlossene Preisformel gefunden werden kann und ob sogar ein allgemeines Kriterium für die Existenz einer solchen Formel existiert.

Das zweite größere Ziel innerhalb der Arbeit bestand in der Bewertung einer amerikanischen Exchange-Option mit unendlicher Laufzeit im Black-Scholes Modell. Dabei lag das Bestreben darin, die Bewertungstechnik von Beibel/Lerche auf die Option anzuwenden. Dazu wurde zunächst die Grundidee dieser Methode erläutert. Unter gewissen Bedingungen an die Dividendenzahlungen konnte die Methode dann zur Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option herangezogen werden. Die Fälle von Dividendenzahlungen, in denen diese Bewertungsstrategie keine Anwendung fand, konnten mit Hilfe anderer Vorgehensweisen gelöst werden. Das gesamte Ergebnis der Bewertung der Perpetual-American-Exchange-Option ist noch einmal in Tabelle 1 zusammengefasst. Unter den gegebenen Modellbedingungen konnten in jeder Dividendensituation arbitragefreie Preise für die Option gefunden werden. Weiterführend könnte nun untersucht werden, ob sich die Methode von Beibel/Lerche auch unter anderen Annahmen an das Finanzmarktmodell zur Bewertung der Option eignet. Bereits in einem Modell mit deterministischen Volatilitätsfunktionen erscheint die gesamte Situation deutlich komplizierter.

Im letzten Teil wurde noch eine Symmetrie der Preise von Exchange-Optionen vor-

gestellt. Diese Symmetrie wurde mit Hilfe der bekannten Put-Call-Symmetrie von Carr für das Black-Scholes-Modell hergeleitet. Der Beweis der Symmetrie fand hier über die Behauptung einer Verteilungsgleichheit der Forwardpreise bezüglich bestimmter Maße statt. Unter Verwendung einer ähnlichen Behauptung konnte die Symmetrie von Carr ebenfalls für ein allgemeineres vollständiges Finanzmarktmodell mit stochastischer Zinsrate formuliert werden. Dadurch erhält man einen Zusammenhang der Preise von europäischen Exchange-Optionen mit vertauschten Underlyings. In Finanzmarktmodellen ohne Dividendenzahlungen kann diese Symmetrie sogar ohne die Forwardpreise der Aktien formuliert werden und benötigt somit nur die aktuellen Aktienpreise. Anschließend wurde die Symmetrie von Carr beispielhaft in einem Modell betrachtet, in dem die short-rate einem Vasicek-Prozess folgt. In diesem Punkt lag das Augenmerk hauptsächlich auf der konkreten Verteilung der Forwardpreise und auf dem Forwardmartingalmaß. Dadurch konnte für das Modell mit Vasicek-Zinsrate ebenfalls das zuvor erarbeitete Ergebnis angewandt werden. Außerdem wurde ein Kriterium vorgestellt, unter welchen Voraussetzungen diese Symmetrie im zuvor vorgestellten vollständigen Modell mit stochastischen Zinszahlungen gültig ist. Auch hier ergab sich wieder eine starke Abhängigkeit zwischen der Form der Volatilität der Aktien und der Gültigkeit der Symmetrie von Carr. Zum Abschluss wurde noch untersucht, wie sich die Symmetrie von Carr zum Hedgen von Exchange-Optionen mit Barriere eignen könnte. Hier konnte mit Hilfe der Symmetrie ein Portfolio angegeben werden, mit dem sich solche Optionen semistatisch hedgen lassen. Als mögliche Barrieren wurden hier Schwellen betrachtet, die vom Quotienten der beiden Aktienpreise abhängen. An dieser Stelle könnte überprüft werden, ob sich auch bei Barrieren anderer Form semistatische Hedges finden lassen. Weiter ließe sich hier untersuchen, inwiefern sich die Symmetrie auch auf unvollständige Finanzmärkte übertragen lässt, und ob die Symmetrie sogar in der Praxis Anwendung finden könnte.

Literatur

- [1] Beibel, M; Lerche, H. R.: *A New Look At Optimal Stopping Problems related to Mathematical Finance*. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, erschienen in *Statistica Sinica* 7, (1997), 93-108.
- [2] Boven, Laura Maria: *Über short-rate Modelle zur Beschreibung von Rentenmärkten*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, (2010).
- [3] Christensen, Sören: *Optimierungsprobleme in der Finanzmathematik*. Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, (2013).
- [4] Eksi; Zehra: *A Black-Scholes like model with Vasicek interest rates*. Vienna Institute of Finance, Austria, (2007).
- [5] Gerber, Hans U.; Shiu, Elias S. W.: *Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options on Two Stocks*. *Mathematical Finance* 6, (1996), 303-322.
- [6] Hasov, Katharina: *Modellierung der Volatilitätsstruktur in LIBOR-Markt-Modellen*. Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität, (2012).
- [7] Jeanblanc, Monique; Yor, Marc; Chesney, Marc: *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Verlag London, (2009).
- [8] Kallsen, Jan: *Computational Finance*. Lecture Notes, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Version: July 13, (2012).
- [9] Lerche, H. R.: *Stochastische Prozesse und Finanzmathematik*. Vorlesung, Universität Freiburg, (2009).
- [10] Margrabe, William: *The Value of an Option to exchange one Asset for another*. *The Journal of Finance* 33 (1978) No. 1.
- [11] Paulsen, Volkert: *Höhere Finanzmathematik*. Handschriftliches Vorlesungsskript. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, (2014).
- [12] Privault, Nicolas: *Notes on Stochastic Finance*. Lecture Notes. Nanyang Technological University, (2013).
- [13] Schroder, Mark: *Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula*. *The Journal of Finance* 44 (1989) No. 1.

- [14] Tiemann, Stefanie: *Die Put-Call Symmetrie und deren Anwendung bei der Bewertung von Barriereoptionen*. Masterarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, (2013).
- [15] Wong, Shek-Keung Tony: *The Generalized Perpetual American Exchange-Option Problem*. Kyoto University, *Advances in Applied Probability* 40, (2008), 163-182.
- [16] Xia, Jianming; Zhou, Xun Yu: *Stock Loans*. *Mathematical Finance* 17, (2007), 307-317.